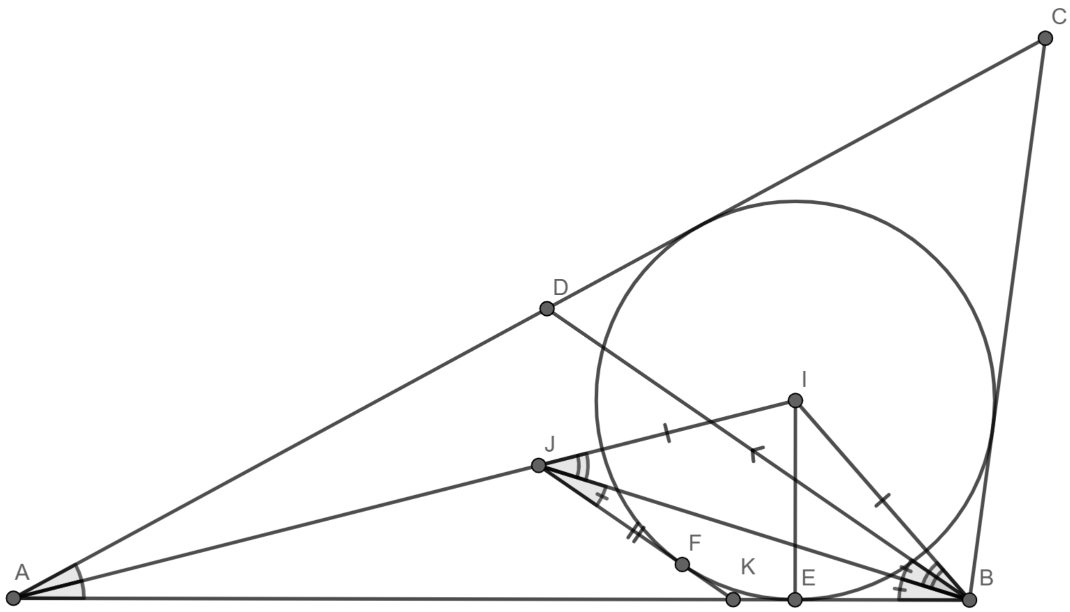
10 класс

10.4. На стороне AC треугольника ABC нашлась такая точка D, что $BC = DC$. Пусть J — центр вписанной окружности треугольника ABD. Докажите, что одна из касательных из точки J ко вписанной окружности треугольника ABC параллельна прямой BD.



Решение. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Для начала покажем, что $IJ = IB$. Пусть $\angle IAB = \alpha$, $\angle ABD = \beta$. Заметим, что точки I, J, A лежат на биссектрисе угла A. $\angle IJB = \angle JBA + \angle JAB = \alpha + \frac{\beta}{2}$ и $\angle CBD = \angle CDB = \beta + 2\alpha$. Так как $\angle CBI = \angle ABI = \frac{\angle ABC}{2} = \alpha + \beta$, то $\angle DBI = \alpha$. Значит

$$\angle IBJ = \angle DBI + \angle DBJ = \angle DBI + \frac{\angle ABD}{2} = \alpha + \frac{\beta}{2} = \angle IJB,$$

откуда $IB = IJ$. Пусть $K \in AB$ такая точка, что $JK \parallel BD$. Тогда

$$\angle KJB = \angle AKJ - \angle KBJ = \angle ABD - \angle KBJ = \angle KBJ,$$

поэтому $JK = BK$. Значит $\triangle IKJ = \triangle IKB$, следовательно $\angle IKJ = \angle IKB$. Пусть вписанная окружность треугольника ABC касается AB в точке E, а F такая точка на отрезке JK, что $KE = KF$. Тогда $\triangle IKE = \triangle IKF$, поэтому $IE = IF$ и $\angle IFK = \angle IEK = 90°$. Значит KJ касается вписанной окружности треугольника ABC в точке F и $JF \parallel BD$, что и требовалось доказать.

10.5. Найдите все функции $f : R^+ \to R^+$ такие, что $f(x)^2 = f(xy) + f(x + f(y)) - 1$ для любых $x, y \in R^+$. (Здесь R^+ — множество положительных действительных чисел.)

Ответ. $f(x) = 1$ для любого $x > 0$.

Решение. Обозначим данное равенство через $P(x, y)$, и пусть $f(1) = c$. Тогда

$$P(1, x) : f(x) + f(f(x) + 1) = c^2 + 1. \tag{1}$$

$$P(x, 1) : f(x + c) = f(x)^2 - f(x) + 1. \tag{2}$$

Из (1) следует, что

$$f(x) < c^2 + 1, \text{ для любого } x > 0. \tag{3}$$

Предположим, что существует число $t > 0$ такое, что $f(t) > 1$. Рассмотрим последовательность: $a_0 = f(t) > 1$ и $a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1$ при всех $n \geq 0$. Из (2) следует, что $a_n = f(t + cn)$ для любого $n \geq 0$. Индукцией легко доказать, что $a_n > 1$ и $a_{n+1} - a_n = (a_n - 1)^2 > 0$ для любого $n \geq 0$. Используя (3) получаем, что

$$c^2 > f(t + cn) - 1 = a_n - 1 = a_{n-1}(a_{n-1} - 1) = a_{n-1}a_{n-2}(a_{n-2} - 1) = \dots$$

$$\dots = a_{n-1}a_{n-2}\dots a_0(a_0 - 1) > {a_0}^n(a_0 - 1)$$

для любого натурального n, что невозможно, так как $a_0 > 1$ и $a_0^n \to \infty$ при $n \to \infty$. Значит $f(x) \leq 1$ для любого $x > 0$.

Предположим, что существует число $t > 0$ такое, что $z = f(t) < 1$. Аналогично рассмотрим последовательность: $a_0 = f(t) < 1$ и $a_{n+1} = {a_n}^2 - a_n + 1$ при всех $n \geq 0$. Индукцией легко доказать, что $a_n < 1$ и $a_{n+1} - a_n = (a_n - 1)^2 > 0$ для любого $n \geq 0$. По теореме Вейерштрасса последовательность a_n имеет предел. Пусть A — искомый предел. Тогда

$$A = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty}({a_n}^2 - a_n + 1) = A^2 - A + 1,$$

следовательно $A = 1$. Пусть $q \in \left(1, \dfrac{1}{z}\right)$ — произвольное действительное число. Индукцией по n докажем, что для любого целого $n \geq 0$ существует число $u > 0$ такое, что $f(u) \leq \dfrac{z}{q^n}$.

База. Для $n = 0$ подходит $u = t$.

Предположение. Пусть утверждение верно для n.

Переход. Докажем для $n + 1$. Обозначим $\varepsilon = \dfrac{z}{q^{n+1}} - \dfrac{z^2}{q^{2n}}$.

Если $n = 0$, то $\varepsilon = \dfrac{z(1 - qz)}{q} > 0$, а если $n > 0$, то $\varepsilon > 0$, так как $z > z^2$ и $q^{2n} \geq q^{n+1}$. Значит $\varepsilon > 0$. Пусть $y > 0$ такое число, что $f(uy) > 1 - \varepsilon$ (такое число существует, потому что $\lim_{n\to\infty} f(t + cn) = 1$). Тогда

$$P(u, y) : f(u + f(y)) = 1 + f(u)^2 - f(uy) < \frac{z^2}{q^{2n}} + \varepsilon = \frac{z}{q^{n+1}}.$$

Переход доказан.

Следовательно, функция f может принимать сколь угодно бесконечно малые значения, что невозможно, так как из (1) следует, что $f(x) = c^2 + 1 - f(f(x) + 1) \geq c^2$, противоречие. Значит, $f(x) = 1$ для любого $x > 0$, что легко проверить удовлетворяет условию задачи.

10.6. Пусть a — натуральное число. Докажите, что для любого решения (x, y) уравнения

$$x(y^2 - 2x^2) + x + y + a = 0$$

в целых числах выполняется неравенство: $|x| \leq a + \sqrt{2a^2 + 2}$.

Решение. Если $x = 0$ или данное уравнение не имеет целочисленного решения, то задача решена. Пусть теперь наоборот. Обозначим $A = a + \sqrt{2a^2 + 2} > 2a$. По условию имеем, что $y + a = kx$ для некоторого целого k. Подставив в условие равенство $y = kx - a$ получим

$$x^2(k^2 - 2) - 2akx + a^2 + k + 1 = 0. \qquad (*)$$

1) $k = 1$. Тогда $(x + a)^2 = 2a^2 + 2$, откуда $|x| \leq A$.

2) $k = 0$. В этом случае $2x^2 = a^2 + 1$, откуда $|x| < A$.

3) $k = -1$. В этом случае $(x - a)^2 = 2a^2$, что неверно (степень вхождение 2 в правой части нечетно).

4) $k \geq 2$. Из (*) следует, что $x > 0$. Предположим, что $x > A$. Тогда из (3)

$$2x^2 = (kx - a)^2 + k + 1 > (2x - a)^2 \Longrightarrow \sqrt{2}x > 2x - a \Longrightarrow x < \frac{a}{2 - \sqrt{2}} < 2a,$$

противоречие.

5) $k \leq -2$. Из (*) следует, что $x < 0$. Пусть $z = -x > 0, m = -k \geq 2$. Предположим, что $z > A$. Из (*) получим, что

$$2z^2 - a^2 - 1 = m(mz^2 - 2az - 1) \geq 4z^2 - 4az - 2 \Longrightarrow 2(z - a)^2 \leq a^2 + 1,$$

противоречие.