

Математика пәні бойынша 2021 жылғы Республикалық
олимпиаданың қорытынды кезеңі

Жұмыс уақыты: 4 сағат

Әр есеп 7 ұпайға бағаланады

Калькуляторды қолдануға тыйым салынады

10 сынып, 1 күн

1. Өлшемі 100×100 болатын торлы шаршыны 2×4 және 1×8 тіктөртбұрыш фигураларына, әр фигура саны өзара тең болатындай, кесіп шығуға болады ма? (Фигураларды бұруға және төңкеруге болады.)
2. $AB + AC > 3BC$ шарты орындалатындай ABC үшбұрышы берілген. Осы үшбұрыштың ішінен $\angle ABP = \angle PBQ = \angle QBC$ және $\angle ACQ = \angle QCP = \angle PCB$ болатындай P және Q нүктелері белгіленген. $AP + AQ > 2BC$ екенін дәлелдеңіз.
3. (a_n) және (b_n) тізбектері келесі шарттармен берілген: $a_1 = b_1 = 1$ және әрбір натурал n саны үшін $a_{n+1} = a_n + \sqrt{a_n}$, $b_{n+1} = b_n + \sqrt[3]{b_n}$. $a_n \leq b_k < a_{n+1}$ теңсіздігі дәл 2021 k үшін орындалатындай натурал n санының табылатынын дәлелдеңіз.

Заключительный этап Республиканской олимпиады
школьников по математике 2021 года

Время работы: 4 часа

Каждая задача оценивается в 7 баллов

Использование калькуляторов запрещено

10 класс, 1 день

1. Можно ли разрезать клетчатый квадрат 100×100 на равное количество прямоугольников 2×4 и 1×8 ? (Фигурки можно поворачивать и переворачивать.)
2. Дан треугольник ABC , в котором $AB + AC > 3BC$. Внутри этого треугольника отмечены точки P и Q такие, что $\angle ABP = \angle PBQ = \angle QBC$ и $\angle ACQ = \angle QCP = \angle PCB$. Докажите, что $AP + AQ > 2BC$.
3. Последовательности (a_n) и (b_n) заданы условиями $a_1 = b_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + \sqrt{a_n}$, $b_{n+1} = b_n + \sqrt[3]{b_n}$ при всех натуральных n . Докажите, что существует натуральное число n , для которого неравенство $a_n \leq b_k < a_{n+1}$ выполнено ровно при 2021 значениях k .