10 класс

10.1. Можно ли разрезать клетчатый квадрат 100×100 на равное количество прямоугольников 2×4 и 1×8? (Фигурки можно поворачивать и переворачивать.)

Ответ. Нет.

Решение. Предположим, искомое разрезание существует. Площадь каждого прямоугольника равна 8, поэтому общее количество прямоугольников в разрезании равно 1250, то есть прямоугольников каждого вида 625.

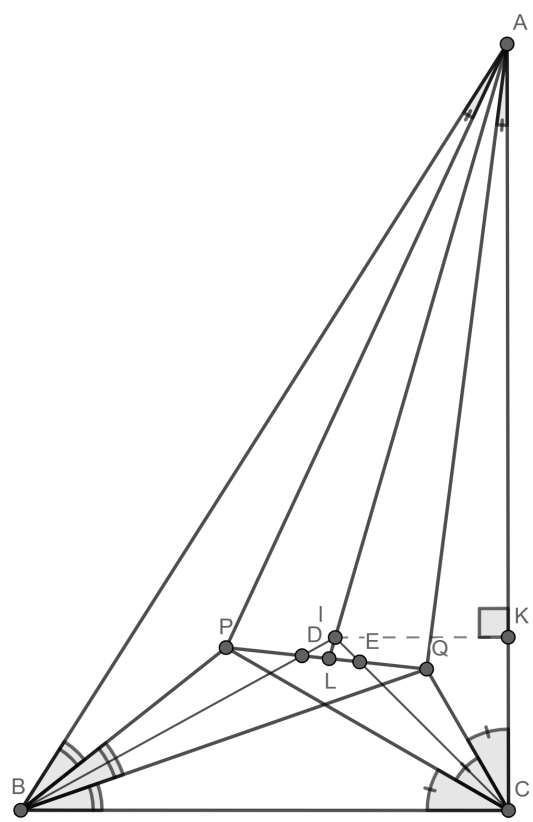
Занумеруем в квадрате строки (сверху вниз) и столбцы (слева направо) числами от 1 до 100, а затем поставим в каждую клетку сумму номеров строки и столбца, на пересечении которых она находится. При этом, если в клетке оказалось число k, то в клетках, примыкающих к ней справа и снизу, будет стоять число $k+1$. Поэтому сумма всех чисел в прямоугольнике 1×8 – является суммой восьми последовательных чисел и, следовательно, даёт остаток 4 при делении на 8. Сумма чисел в 625 таких прямоугольниках тоже даёт такой остаток при делении на 8. Сумма всех чисел в прямоугольнике 2×4 равна

$$k + 2(k+1) + 2(k+2) + 2(k+3) + (k+4) = 8k + 16,$$

где k – число в левом верхнем углу, то есть делится на 8. Таким образом, если искомое разрезание существует, сумма всех чисел в квадрате 100×100 должна давать остаток 4 при делении на 8. С другой стороны, эта сумма равна $2 \times 100 \times (1 + 2 + \cdots + 100)$, то есть кратна 8 – противоречие.

10.2. Дан треугольник ABC, в котором $AB + AC > 3BC$. Внутри этого треугольника отмечены точки P и Q такие, что $\angle ABP = \angle PBQ = \angle QBC$ и $\angle ACQ = \angle QCP = \angle PCB$. Докажите, что $AP + AQ > 2BC$.

Решение. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Так как P и Q изогонально сопряженные точки в треугольнике ABC, то $\angle BAP = \angle CAQ$. Обозначим $\angle PAI = \alpha, \angle ABP = \beta, \angle ACQ = \gamma$.



Из условия следует, что $\beta, \gamma < 60^\circ$, откуда $\cos\beta, \cos\gamma > \dfrac{1}{2}$. Используя теорему синусов для треугольников PBQ и PCQ получаем, что

$$\frac{PC}{PB} \cdot \frac{QB}{QC} = \frac{\sin 2\beta}{\sin\gamma} \cdot \frac{\sin 2\gamma}{\sin\beta} = 4\cos\beta\cos\gamma > 1. \tag{1}$$

Пусть прямые AI, BI, CI пересекают PQ в точках L, D, E соответственно. Используя (1) и свойству биссектрисы получим, что

$$\frac{PD}{DQ} = \frac{PB}{BQ} < \frac{PC}{CQ} = \frac{PE}{EQ},$$

значит точка I лежит внутри треугольника APQ. Тогда используя формулу биссектрисы имеем, что

$$2AI < 2AL = \frac{4AP \cdot AQ}{AP + AQ} \cdot \cos\alpha < \frac{4AP \cdot AQ}{AP + AQ} \leq AP + AQ. \tag{2}$$

Пусть K основание перпендикуляра из I на AC. Тогда

$$AI > AK = \frac{AB + AC - BC}{2} > BC. \tag{3}$$

Из (2) и (3) следует утверждение задачи.

10.3. Последовательности (a_n) и (b_n) заданы условиями $a_1 = b_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + \sqrt{a_n}$, $b_{n+1} = b_n + \sqrt[3]{b_n}$ при всех натуральных n. Докажите, что существует натуральное число n, для которого неравенство $a_n \leq b_k < a_{n+1}$ выполнено ровно при 2021 значениях k.

Решение. Последовательности (a_n) и (b_n) задают разбиение луча $[1; +\infty)$ на полуинтервалы $[a_n; a_{n+1})$ (которые мы будем называть *большими*) и разбиение этого же луча на полуинтервалы $[b_k; b_{k+1})$ (которые мы будем называть *маленькими*). Если длина большого полуинтервала заключена между числами m и $M > m$, а длины всех покрывающих его маленьких полуинтервалов – между d и $D > d$, то количество концов маленьких полуинтервалов, лежащих на любом из больших, заключено между $\frac{m}{D} - 1$ и $\frac{M}{d} + 1$. Действительно, пусть это количество равно s. Тогда они ограничивают $s-1$ (последовательных) маленьких полуинтервалов, суммарная длина которых не превосходит M (поскольку все эти маленькие полуинтервалы содержатся в большом), а с другой стороны, не меньше $(s-1)d$, откуда $s - 1 \leq \frac{M}{d}$. Аналогично, добавляя к этим полуинтервалам ещё два – один перед первым, другой после последнего, получаем $s+1$ маленьких полуинтервалов (суммарной длиной не более $(s+1)D$), которые покрывают большой полуинтервал (длина которого не меньше m), откуда $s + 1 \geq \frac{m}{D}$.

Рассмотрим наименьшее n, для которого $a_n \geq 2021,2^6$. Легко видеть, что $a_n < a_{n+1} < a_{n+2} < 2021,25^6$. Действительно, если $a_k < 2022^6$, то $a_{k+1} - a_k < 2022^3$. Поскольку $a_{n-1} < 2021,2^6$, достаточно проверить, что $2021,25^6 - 2021,2^6 > 3 \cdot 2022^3$. Но $2021,25^6 - 2021,2^6 = (2021,25 - 2021,2)(2021,25^5 + \cdots + 2021,2^5) > 0,05 \cdot 6 \cdot 2021,2^5 > 3 \cdot 2022^3$. Для каждого b_k, лежащего между a_n и a_{n+1}, $2021,2^2 < b_{k+1} - b_k < 2021,25^2$. Поэтому и на полуинтервале $[a_n; a_{n+1})$, и на полуинтервале $[a_{n+1}; a_{n+2})$ количество членов последовательности b_k заключено между $\frac{2021,2^3}{2021,25^2} - 1 > 2020,05$ и $\frac{2021,25^3}{2021,2^2} + 1 < 2022,4$ (здесь мы пользуемся тем, что при $p > 1000$ имеют место неравенства $\frac{(p+0,05)^3}{p^2} < p + 0,2$ и $\frac{(p-0,05)^3}{p^2} > p - 0,2$). Следовательно, на каждом из этих полуинтервалов лежит 2021 или 2022 члена последовательности (b_k).

С другой стороны, на полуинтервале $[a_n; a_{n+2})$ количество членов последовательности (b_k) заключено между $2 \cdot \frac{2021,2^3}{2021,25^2} - 1 > 4041,1$ и $2 \cdot \frac{2021,25^3}{2021,2^2} + 1 < 4043,8$. Поэтому это количество не может быть равно 4044, и хотя бы на одном из двух больших полуинтервалов $[a_n; a_{n+1})$ и $[a_{n+1}; a_{n+2})$ количество членов последовательности (b_k) равно 2021.