

Республиканская олимпиада по математике, 2020 год, 9 класс

1. В комнате есть n ламп и k выключателей. В начале каждая лампа может быть либо включенной, либо выключенной. Каждая лампа соединена проводом ровно с 2020 выключателями. Нажатие на выключатель изменяет на противоположное состояние каждой лампы, к которой он подключен проводом. Известно, что можно так понажимать на выключатели, что все лампы станут включенными. Докажите, что можно добиться того же результата не более, чем за $\left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil$ нажатий на выключатели. $\lfloor x \rfloor$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x . (Зиманов Т.)
2. Пусть $1 \leq x_1, x_2, \dots, x_n \leq 160$ — такие действительные числа, что $x_i^2 + x_j^2 + x_k^2 \geq 2(x_i x_j + x_j x_k + x_k x_i)$ при любых $1 \leq i < j < k \leq n$. Найдите наибольшее возможное значение n . (Сатылханов К.)
3. Даны простое число p и натуральные k и r , причем $r < p$. Известно, что $p^p + 1$ делится на $pk + r$. Докажите, что k делится на r . (Ануарбеков Т.)
4. Вписанная окружность треугольника ABC касается сторон AB, BC, CA в точках C_0, A_0, B_0 , соответственно. Пусть точка M — середина отрезка, соединяющего вершину C_0 с точкой пересечения высот треугольника $A_0 B_0 C_0$, точка N — середина дуги ACB описанной окружности треугольника ABC . Докажите, что прямая MN проходит через центр вписанной окружности треугольника ABC . (Ильясов С.)