

Республиканская олимпиада по математике, 2020 год, 10 класс

1. Найдите все такие пары (m, n) натуральных чисел, что $n^4 \mid 2m^5 - 1$ и $m^4 \mid 2n^5 + 1$. Запись $a \mid b$ обозначает, что a делит b . (*Сатылханов К.*)
2. Найдите все функции $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ такие, что для любых $x, y \in \mathbb{R}^+$ верно равенство:

$$f(x)f(y) = f\left(\frac{xy}{xf(x) + y}\right).$$

\mathbb{R}^+ обозначает множество положительных действительных чисел.
(*Болатов А.*)

3. На медиане CM треугольника ABC отмечена точка N так, что $MN \cdot MC = AB^2/4$. Прямые AN и BN вторично пересекают описанную окружность $\triangle ABC$ в точках P и Q , соответственно. R — точка отрезка PQ , ближайшая к Q , такая что $\angle NRC = \angle BNC$; S — точка отрезка PQ , ближайшая к P , такая что $\angle NSC = \angle ANC$. Докажите, что $RN = SN$. (*М. Кунгожсин*)
4. Марат и Алибек играют в игру на бесконечной в обе стороны клетчатой полоске, в которой клетки пронумерованы последовательными целыми числами слева направо ($\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$). Марат в свой ход ставит один крестик в любую свободную клетку, а Алибек в свой ход ставит нули в любые 2020 свободных клеток. Марат победит, если ему удастся получить такие 4 клетки отмеченные крестиками, что соответствующие номера клеток будут образовывать арифметическую прогрессию. Цель Алибека в этой игре — помешать Марату выиграть. Они ходят по очереди и первым ходит Марат. Сможет ли Марат выиграть как бы ни играл Алибек? (*Зиманов А.*)