Республиканская олимпиада по математике, 2019 год, 9 класс

1. Мэр города любит красивые автомобильные номера. Номер, по его мнению, является красивым, если с помощью расстановки знаков $+$, $-$, $\times$, $/$ и скобок между и вокруг цифр номера, можно получить выражение, значение которого делится на 10. К радости мэра, в этом месяце в городе планируется реформа автомобильных номеров. Какое наименьшее количество цифр должно содержаться в номере, чтобы каждый автомобиль в городе гарантированно обладал красивым номером? (Все номера в городе состоят только из цифр.) *(Абдрахманов А.)*

2. Дан вписанный выпуклый пятиугольник $ABCDE$. Окружность с центром в точке E и радиусом AE пересекает отрезки AC и AD в X и Y соответственно, а окружность с центром в точке C радиусом BC пересекает отрезки BE и BD в точках Z и T соответственно. Прямые XY и ZT пересекаются в точке F. Докажите, что DF и EC перпендикулярны. *(М. Кунгожин)*

3. Сумма положительных чисел a, b и c равна 3. Докажите неравенство $\sqrt[3]{\frac{1}{3a^2(8b+1)}} + \sqrt[3]{\frac{1}{3b^2(8c+1)}} + \sqrt[3]{\frac{1}{3c^2(8a+1)}} \geq 1$. *(Аубекеров Д.)*

4. В правильном n-угольнике ($n \geq 4$) каждая диагональ красится в один из двух цветов. Затем в каждой паре одноцветных пересекающихся диагоналей удаляют одну из этих диагоналей. Какое наибольшее число диагоналей могло остаться при таких операциях? (Диагонали, выходящие из одной вершины, пересекающимися не считаются.) *(Ильясов С.)*

5. В прямоугольном треугольнике ABC точка D симметрична точке C относительно гипотенузы AB. Пусть M — произвольная точка отрезка AC, а P — основание перпендикуляра из точки C на прямую BM. Точка H — середина отрезка CD. На отрезке CH (внутри угла HPB) нашлась такая точка N , что $\angle DPH = \angle NPB$. Докажите, что точки M, P, N и D лежат на одной окружности. *(М. Кунгожин)*

6. Найдите все тройки целых чисел (a, b, c) и натуральное k такие, что $a^2 + b^2 + c^2 = 3k(ab + bc + ca)$.