Республиканская олимпиада по математике, 2019 год, 11 класс

1. Для положительных вещественных чисел a, b и c докажите неравенство $\sqrt[3]{\frac{a}{b}}+\sqrt[5]{\frac{b}{c}}+\sqrt[7]{\frac{c}{a}}>\frac{5}{2}$. *(Аубекеров Д.)*

2. Множество Φ состоит из конечного числа точек на плоскости. Расстояние между любыми двумя точками из Φ по крайней мере $\sqrt{2}$. Известно, что вырезанным из бумаги правильным треугольником со стороной 3 можно накрыть все точки множества Φ. Из какого наибольшего количества точек может состоять Φ? *(Ильясов С.)*

3. Пусть p -- простое число вида $4k+1$, а $\frac{m}{n}$ -- такая несократимая дробь, что $\sum\limits_{a=2}^{p-2}\frac{1}{a^{\frac{p-1}{2}}+a^{\frac{p+1}{2}}}=\frac{m}{n}$. Докажите, что $m+n$ делится на p. *(Жанахметов С.)*

4. Найдите все натуральные n, k, $a_1, a_2, \dots, a_k$ такие, что $n^{k+1}+1$ делится на $(na_1+1)(na_2+1)\dots(na_k+1)$. *(Ануарбеков Т.)*

5. Дан клетчатый прямоугольник размером $n\times m$. Всегда ли можно отметить 3 или 4 узла прямоугольника так, что на каждой прямой, содержащей сторону прямоугольника, лежал хотя бы один из отмеченных узлов, а несамопересекающийся многоугольник с вершинами в этих узлах имеет площадь, равную $\frac{1}{2}\min\left(\text{НОД}(n,m),\frac{n+m}{\text{НОД}(n,m)}\right)$? *(Аханов Н.)*

6. Касательная прямая l к описанной окружности остроугольного треугольника ABC пересекает прямые AB, BC и CA в точках C', A' и B' соответственно. Пусть H ---ортоцентр треугольника ABC. На прямых $A'H$, $B'H$ и $C'H$ соответственно отмечены точки A_1, B_1 и C_1 (отличные от H) такие, что $AH=AA_1$, $BH=BB_1$ и $CH=CC_1$. Доказать, что окружности, описанные около треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, касаются. *(Ильясов С.)*