

Республиканская олимпиада по математике, 2019 год, 10 класс

1. Сумма обратных величин положительных чисел a , b и c равна 1. Докажите неравенство $\frac{b+c}{a+bc} + \frac{a+c}{b+ac} + \frac{b+a}{c+ab} \geq \frac{12}{a+b+c-1}$. (Аубекеров Д.)
2. Дана бесконечная клетчатая бумага с размером клеток 1 см. В узлах клеток отмечено 2019 точек так, что расстояние между любыми двумя отмеченными точками равно натуральному числу сантиметров. Докажите, что больше 333333 из этих расстояний являются натуральными числами, которые делятся на 3. (С. Полянских)
3. Множество Φ состоит из конечного числа точек на плоскости. Расстояние между любыми двумя точками из Φ по крайней мере $\sqrt{2}$. Известно, что вырезанным из бумаги правильным треугольником со стороной 3 можно накрыть все точки множества Φ . Из какого наибольшего количества точек может состоять Φ ? (Ильясов С.)
4. Пусть \mathbb{Q} — множество всех рациональных чисел. Найдите все функции $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ такие, что для любых $x, y \in \mathbb{Q}$ выполнено равенство $f(x+y) - f(y) = f(f(x-y) + f(y))$. (Ильясов С.)
5. В окружности ω диаметр AB и хорда CD перпендикулярны. Пусть M любая точка отрезка AC . Точка P — основание перпендикуляра из точки C на прямую BM . Пусть окружность ω_1 , описанная около треугольника MPD , пересекает описанную окружность треугольника CPB во второй раз в точке Q (точки P и Q лежат по разные стороны от прямой AB). Прямая CD вторично ω_1 в точке N . Докажите, что $\angle CQN = \angle BPN$. (М. Кунгожин)
6. Существуют ли простые числа p , q и r такие, что число $\frac{p^p + q^q + r^r}{2pqr}$ целое? (Ануарбеков Т.)