

Республиканская олимпиада по математике, 2018 год, 9 класс

1. Дан параллелограмм $ABCD$. Некоторая окружность проходит через точки A и B и пересекает отрезки BD и AC во второй раз соответственно в точках X и Y , а описанная окружность треугольника ADX пересекает отрезок AC во второй раз в точке Z . Докажите, что отрезки AU и CZ равны. (*М. Кунгожин*)
2. Известно, что a , b и c — длины сторон треугольника. Докажите, что $\frac{(a+b+c)(c+a-b)}{(a+b-c)(b+c-a)} \geq \frac{9(3a-5b+3c)}{3a+5b-3c}$. (*М. Кабак*)
3. Дополненная десятичная запись натурального числа n — это представление его в виде суммы степеней числа 10 с целыми неотрицательными показателями, в котором каждое слагаемое повторяется не более 10 раз. Сколько различных дополненных десятичных записей у числа $n = 2018, 2018, 2018 \dots 2018$ (число 2018 выписано 100 раз, то есть n является 400-значным числом)? (*А. Голованов*)
4. Можно ли разрезать прямоугольник размером 2018×2019 на фигурки вида уголка из 5 клеток (фигура, полученная вырезанием квадрата 2×2 из квадрата 3×3) и квадратика 2×2 (фигурки можно поворачивать и переворачивать)? (*А. Голованов*)
5. Решите в целых числах уравнение $2^a + a^2 = 4^b + b^2$. (*А. Голованов*)
6. На боковой стороне CD трапеции $ABCD$ нашлась точка M такая, что $BM = BC$. Пусть прямые BM и AC пересекаются в точке K , а прямые DK и BC — в точке L . Докажите, что углы BML и DAM равны. (*М. Кунгожин*)