Республиканская олимпиада по математике, 2018 год, 11 класс

1. В равнобокой трапеции $ABCD$ точка O — середина основания AD. Окружность с центром в точке O и радиусом BO касается прямой AB. Пусть отрезок AC пересекает эту окружность в точке K $(C \neq K)$, и пусть M такая точка, что $ABCM$ — параллелограмм. Описанная окружность треугольника CMD пересекает отрезок AC в точке L $(L \neq C)$. Докажите, что $AK = CL$. *(М. Кунгожин)*

2. Дано натуральное число $m \geq 2$. Последовательность натуральных чисел $(b_0, b_1, \ldots, b_m)$ назовем вогнутой, если $b_k + b_{k-2} \leq 2b_{k-1}$ для всех $2 \leq k \leq m$. Докажите, что существует не более 2^m вогнутых последовательностей, начинающихся с $b_0 = 1$ и $b_1 = 2$. *(Д. Елиусизов)*

3. $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел. Существует ли функция $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такая, что для любых натуральных m и n выполнено равенство $f(mf(n)) = f(m) f(m+n) + n$? *(Сатылханов К.)*

4. Докажите, что для любых действительных чисел $a, b, c, d \in (0, 1)$ выполняется неравенство $(ab - cd)(ac + bd)(ad - bc) + \min(a, b, c, d) < 1$. *(Сатылханов К.)*

5. Дано множество $S = \{xy(x+y) \, ; | ; x, y \in \mathbb{N}\}$. Пусть a и n натуральные числа такие, что $a + 2^k \in S$ для каждого $k = 1, 2, \ldots, n$. Найдите наибольшее возможное значение n. *(Сатылханов К.)*

6. Внутри выпуклого четырехугольника $ABCD$ отмечена точка M такая, что $\angle AMB = \angle ADM + \angle BCM$ и $\angle AMD = \angle ABM + \angle DCM$. Докажите, что $AM \cdot CM + BM \cdot DM \geq \sqrt{AB \cdot BC \cdot CD \cdot DA}$. *(Н. Седракян)*