

Республиканская олимпиада по математике, 2018 год, 10 класс

1. Диагонали трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) пересекаются в точке K . На прямой AD отмечены точки L и M так, что A лежит на отрезке LD , D лежит на отрезке AM , $AL = AK$ и $DM = DK$. Докажите, что прямые CL и BM пересекаются на биссектрисе угла BKC . (*М. Кунгожин*)
2. Дополненная десятичная запись натурального числа n — это представление его в виде суммы степеней числа 10 с целыми неотрицательными показателями, в котором каждое слагаемое повторяется не более 10 раз. Сколько различных дополненных десятичных записей у числа $n = 2018, 2018, 2018 \dots 2018$ (число 2018 выписано 100 раз, то есть n является 400-значным числом)? (*А. Голованов*)
3. Пусть \mathbb{R}^+ — множество положительных действительных чисел. Найдите все функции $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ такие, что $f\left(3f(xy)^2 + (xy)^2\right) = (xf(y) + yf(x))^2$ для любых $x, y \in \mathbb{R}^+$. (*Сатылханов К.*)
4. Даны натуральные числа a, b, c и d такие, что числа a и b взаимно просты и $a > b$. Известно, что число c^2 делится на $a^2 + b$, а число d^2 делится на $a^2 + b^2$. Докажите, что $cd > 2a^2$. (*Сатылханов К.*)
5. Докажите, что для любых действительных чисел $a, b, c \in (0, 1)$ выполняется неравенство $(\sqrt{2}a - bc)(\sqrt{2}b - ca)(\sqrt{2}c - ab) \leq \frac{1}{8}$. (*Сатылханов К.*)
6. Диагонали вписанного выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O . Пусть ℓ — прямая, делящая угол AOB пополам. Обозначим через (ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3) невырожденный треугольник, образованный прямыми ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 . Пусть $\Delta_1 = (\ell, AB, CD)$ и $\Delta_2 = (\ell, AD, BC)$. Докажите, что описанные окружности треугольников Δ_1 и Δ_2 касаются друг друга. (*М. Кунгожин*)