Республиканская олимпиада по математике, 2017 год, 9 класс

1. Можно ли числа 1, 2, ..., 2017 разбить на три непустых множества A, B и C так, что для любых $a \in A$, $b \in B$ и $c \in C$ числа $ab + c$ и $ac + b$ не являлись точными квадратами? *(Сатылханов К.)*

2. Натуральное число a и простое p таковы, что $\textbf{НОД}(a, p!) = 1$. Докажите, что $a^{(p-1)!} - 1$ делится на $p!$. *(Ануарбеков Т.)*

3. На сторонах треугольника ABC во внешнюю сторону построены прямоугольники равных площадей $ABLK$, $BCNM$ и $CAQP$. Пусть X, Y и Z середины отрезков KQ, LM и NP соответственно. Докажите, что прямые AX, BY и CZ пересекаются в одной точке. *(М. Кунгожин)*

4. Неравнобедренный треугольник ABC вписан в окружность ω с центром O. Продолжение биссектрисы CN пересекает ω в точке M. Пусть MK — высота треугольника BCM, P — середина отрезка CM, а Q — точка пересечения прямых OP и AB. Пусть прямая MQ во второй раз пересекает ω в точке R, а T — точка пересечения прямых BR и MK. Докажите, что $NT \parallel PK$. *(М. Кунгожин)*

5. Пусть a и b такие действительные числа, что $\left|3a^2 - 1\right| \leq 2b$ и $\left|3b^2 - 2\right| \leq a$. Докажите, что $a^4 + b^3 \leq 2$. *(Сатылханов К.)*

6. В каждую клетку таблицы 100×100 записано одно из чисел $1, 2, \ldots, 100$, причем каждое из этих чисел встречается в таблице 100 раз. Назовем *линией* любую строку или столбец таблицы. За один ход разрешается взять линию, в котором сумма чисел больше 100, и обнулить все числа на этой линии. Какое наибольшее количество ненулевых чисел может остаться в таблице, если известно, что после нескольких ходов во всех линиях сумма чисел не превосходит 100? *(Сатылханов К.)*