Республиканская олимпиада по математике, 2017 год, 11 класс

1. Неравнобедренный треугольник ABC вписан в окружность ω. Касательная к этой окружности в точке C пересекает прямую AB в точке D. Пусть биссектриса угла CDB пересекает отрезки AC и BC в точках K и L соответственно. На стороне AB взята точка M такая, что $AK/BL = AM/BM$. Пусть перпендикуляры из точки M к прямым KL и DC пересекают прямые AC и DC в точках P и Q соответственно. Докажите, что угол CQP в два раза меньше угла ACB. *(М. Кунгожин)*

2. Даны действительные числа $x, y, z \geq \dfrac{1}{2}$ такие, что $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Докажите неравенство $\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{z}\right)\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}\right) \geq 2$. *(Сатылханов К.)*

3. Бесконечная, строго возрастающая последовательность $\{a_n\}$ натуральных чисел удовлетворяет условию $a_{a_n} \leq a_n + a_{n+3}$, при всех $n \geq 1$. Докажите, что существуют бесконечно много троек (k, l, m) натуральных чисел таких, что $k < l < m$ и $a_k + a_m = 2a_l$. *(Сатылханов К.)*

4. Остроугольный треугольник ABC $(AC > BC)$ вписан в окружность с центром в точке O, а CD — диаметр этой окружности. На продолжении луча DA за точку A взята точка K, а на отрезке BD точка L $(DL > LB)$ так, что $\angle OKD = \angle BAC$, $\angle OLD = \angle ABC$. Докажите, что прямая KL проходит через середину отрезка AB. *(М. Кунгожин)*

5. Рассмотрим всевозможные наборы натуральных чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_{100})$ такие, что $1 \leq x_i \leq 2017$ для каждого $i = 1, 2, \ldots, 100$. Будем говорить, что набор $(y_1, y_2, \ldots, y_{100})$ *больше* набора $(z_1, z_2, \ldots, z_{100})$, если $y_i > z_i$ для каждого $i = 1, 2, \ldots, 100$. Какое наибольшее число наборов можно выписать на доску так, чтобы никакой набор не был больше никакого другого? *(Ильясов С., Аманкельды А.)*

6. Докажите, что существуют бесконечно много составных натуральных чисел n, для которых число $2^{\frac{n-1}{2}} + 1$ делится на n. *(Ануарбеков Т.)*