Республиканская олимпиада по математике, 2017 год, 10 класс

1. Можно ли числа 1, 2, ..., 2017 разбить на три непустых множества A, B и C так, что для любых $a \in A$, $b \in B$ и $c \in C$ числа $ab + c$ и $ac + b$ не являлись точными квадратами? *(Сатылханов К.)*

2. Найдите все функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такие, что $\left| y - f\left(f\left(x\right)\right) \right| \geq \left| f(x)^2 + xf\left(y\right) \right|$ для любых действительных x и y. Здесь $\mathbb{R}$ — множество действительных чисел. *(Сатылханов К.)*

3. Дан неравнобедренный треугольник ABC. Точки K и N лежат на стороне AC, а точки M и L на стороне BC так, что $AN = CK = CL = BM$. Пусть отрезки KL и MN пересекаются в точке P. Докажите, что $\angle RPN = \angle QPK$, где R — середина стороны AB, а Q — середина дуги ACB окружности, описанной около треугольника ABC. *(М. Кунгожин)*

4. Остроугольный треугольник ABC $(AC > BC)$ вписан в окружность с центром в точке O, а CD — диаметр этой окружности. На продолжении луча DA за точку A взята точка K, а на отрезке BD точка L $(DL > LB)$ так, что $\angle OKD = \angle BAC$, $\angle OLD = \angle ABC$. Докажите, что прямая KL проходит через середину отрезка AB. *(М. Кунгожин)*

5. В каждую клетку таблицы 100×100 записано одно из чисел 1,2,...,100, причем каждое из этих чисел встречается в таблице 100 раз. Назовем *линией* любую строку или столбец таблицы. За один ход разрешается взять линию, в котором сумма чисел больше 100, и обнулить все числа на этой линии. Какое наибольшее количество ненулевых чисел может остаться в таблице, если известно, что после нескольких ходов во всех линиях сумма чисел не превосходит 100? *(Сатылханов К.)*

6. Найдите все пары нечетных натуральных чисел (a, b) таких, что $a, b < 2^{2017}$, а числа $a^b + b$ и $b^a + a$ делятся на 2^{2017}. *(Сатылханов К.)*