

Республиканская олимпиада по математике, 2016 год, 9 класс

1. Клетчатую таблицу $n \times n$ (где $n \geq 2$) покрывают уголками, состоящими из трёх единичных клеток (уголок можно неоднократно поворачивать на 90°) так, чтобы выполнялись следующие условия: 1) каждая клетка таблицы покрыта хотя бы одним из уголков; 2) две соседние по стороне клетки, покрытые одним уголком, не могут быть одновременно покрыты другим. Каково наибольшее возможное число уголков в таком покрытии? (*Ильясов С.*)
2. Решите уравнение $n! + 10^{2014} = m^4$ в натуральных числах m и n . (*Ким А.*)
3. Вокруг треугольника ABC описана окружность ω , а I — точка пересечения биссектрис этого треугольника. Прямая CI пересекает ω вторично в точке P . Пусть окружность с диаметром IP пересекает AI , BI и ω вторично в точках M , N и K соответственно. Отрезки KN и AB пересекаются в точке B_1 , а отрезки KM и AB — в точке A_1 . Докажите, что $\angle ACB = \angle A_1IB_1$. (*М. Кунгожин*)
4. В треугольнике ABC из наибольшего угла C проведена высота CH . Отрезки HM и HN — высоты треугольников ACH и BCH соответственно, а HP и HQ — биссектрисы треугольников AMH и BNH . Пусть точка R — основание перпендикуляра из точки H на прямую PQ . Докажите, что R — точка пересечения биссектрис треугольника MNH . (*М. Кунгожин*)
5. Существуют ли натуральное число $m \geq 2$ и многочлен с целыми коэффициентами $p(x)$, такие, что $F_n - p(n)$ делится на m для любого натурального n ? Здесь (F_n) — последовательность Фибоначчи, которая задается двумя первыми членами $F_1 = F_2 = 1$ и рекуррентным соотношением $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. (*А. Васильев*)
6. На плоскости выбраны 101 синяя и 101 красная точка, причем никакие три не лежат на одной прямой. Сумма попарных расстояний между красными точками равна 1 (то есть сумма длин отрезков с концами в красных точках), сумма попарных расстояний между синими тоже равна 1, а сумма длин отрезков с концами разных цветов равна 400. Докажите, что можно провести прямую, отделяющую все красные точки от всех синих. (*Ким А.*)