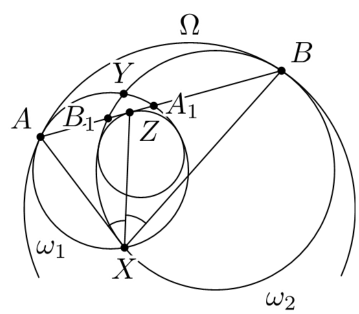
Республиканская олимпиада по математике, 2016 год, 11 класс

1. Для любого натурального числа докажите, что все его натуральные делители можно расставить по кругу так, чтобы из любых двух соседних чисел одно число делилось на другое. *(Д. Елиусизов)*

2. Найдите все рациональные числа a, для которых существует бесконечно много таких положительных рациональных чисел q, что уравнение $[x^a] \cdot \{x^a\} = q$ не имеет решений в рациональных числах x. *(А. Васильев)*

3. Две пересекающиеся в точках X и Y окружности ω_1 и ω_2 находятся внутри окружности Ω и касаются ее в точках A и B. Прямая AB повторно пересекает окружности ω_1 и ω_2 в точках A_1 и B_1, соответственно. Вписанная в криволинейный треугольник A_1B_1X окружность касается стороны A_1B_1 в точке Z. Докажите, что $\angle AXZ = \angle BXZ$.



(Ильясов С.)

4. В равнобедренном треугольнике ABC точка H — середина основания AB, M — середина отрезка BH. Пусть HK — высота треугольника ACH, а прямые CM и BK пересекаются в точке L. Перпендикуляр к прямой BC в точке B и прямая LH пересекаются в точке N. Докажите, что угол BCN в два раза меньше угла ACB. *(М. Кунгожин)*

5. На плоскости выбраны 101 синяя и 101 красная точка, причем никакие три не лежат на одной прямой. Сумма попарных расстояний между красными точками равна 1 (то есть сумма длин отрезков с концами в красных точках), сумма попарных расстояний между синими тоже равна 1, а сумма длин отрезков с концами разных цветов равна 400. Докажите, что можно провести прямую, отделяющую все красные точки от всех синих. *(Ким А.)*

6. Бесконечная строго возрастающая последовательность $\{a_n\}$ положительных чисел удовлетворяет соотношению

$$a_{n+2} = (a_{n+1} - a_n)^{\sqrt{n}} + n^{-\sqrt{n}}$$

для каждого натурального n. Докажите, что для любого $C > 0$ существует такое натуральное $m(C)$ (зависящее от C), что $a_{m(C)} > C$. *(Сатылханов К.)*