Республиканская олимпиада по математике, 2015 год, 9 класс

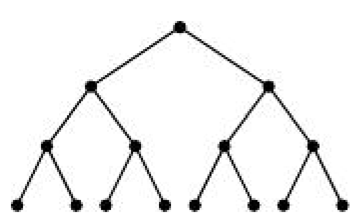
1. Даны действительные числа $a, b, c > 1$. Докажите неравенство $a^a + b^b + c^c \geq a^b + b^c + c^a$. *(Ким А.)*

2. Найдите все тройки попарно взаимно простых натуральных чисел (a, b, c) такие, что для каждого натурального n число $(a^n + b^n + c^n)^2$ делится на $ab + bc + ca$. *(Сатылханов К.)*

3. Вписанная и вневписанная окружности прямоугольного треугольника ABC, в котором угол C прямой, касаются стороны BC в точках A_1 и A_2 соответственно. Аналогично определим точки B_1 и B_2. Докажите, что отрезки A_1B_2 и B_1A_2 пересекаются на высоте проведённой из вершины C треугольника ABC. *(М. Кунгожин)*

4. В треугольнике ABC точка N — основание биссектрисы угла B, а точка M — середина стороны AC. На отрезке BN нашлись точки A_1 и C_1 такие, что $NA = NA_1$ и $NC = NC_1$. Прямые AA_1 и CC_1 пересекаются в точке E. Прямая ME пересекает отрезок BC в точке F. Докажите равенство $AB + BF = CF$. *(М. Кунгожин)*

5. Дано дерево полного пирамидального вида, которое состоит из $n+1$ уровней, и из каждой вершины исходит два ребра вниз и входит одно ребро сверху (при этом в самую верхнюю вершину уровня 1 не входит ни одно ребро, а из вершин последнего $(n+1)$-го уровня не исходят рёбра). На рисунке ниже пример показан для $n = 3$. Сколько существует способов раскрасить ребра данного дерева в заданные 2^n цветов (каждое ребро покрашено в один цвет) так, чтобы для каждого цвета все рёбра, покрашенные в этот цвет, составляли путь из некоторой вершины в вершину последнего уровня? (Путь — это последовательность вершин, где каждая следующая вершина соединена ребром с предыдущей и находится уровнем ниже.)



(Д. Елиусизов)

6. Найдите все такие пары натуральных чисел (n, k), что число $(n+1)(n+2)\ldots(n+k)-k$ является полным квадратом. *(Ильясов С., Овчинников Д.)*