Республиканская олимпиада по математике, 2015 год, 11 класс

1. Дано натуральное число a. Докажите, что для любого натурального m существует бесконечно много натуральных n таких, что количество делителей числа na^n+1 делится на m. *(Сатылханов К.)*

2. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Точки K и M — середины сторон BC и AD соответственно. Отрезки AK и BM пересекаются в точке N, а отрезки KD и CM — в точке L. Оказалось, что полученный четырехугольник $KLMN$ — вписанный. Пусть описанные окружности треугольников BNK и AMN во второй раз пересекаются в точке Q, а описанные окружности треугольников KLC и DML — в точке P. Докажите, что у четырехугольников $KLMN$ и $KPMQ$ площади равны. *(М. Кунгожин)*

3. На плоскости заданы 2015 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой и никакие четыре на одной окружности. Рассмотрим окружности, проходящие через три точки из данного множества и разбивающие остальные пополам, то есть 1006 лежит внутри окружности, а 1006 вне нее. Докажите, что найдутся хотя бы три окружности из рассмотренных, которые пересекающиеся по двум точкам из данного множества. *(Ильясов С.)*

4. В треугольнике ABC точка N — основание биссектрисы угла C, точка M — середина стороны AB, а ω — описанная около него окружность. Прямая CN во второй раз пересекает ω в точке D. На отрезках AD и BD взяты точки K и L соответственно, так, что $\angle ACK = \angle BCL$. Пусть описанные окружности треугольников ACK и BCL во второй раз пересекаются в точке P, а Q — точка пересечения прямых DM и KL. Докажите, что точки M, N, P, Q лежат на одной окружности. *(М. Кунгожин)*

5. Найдите все такие пары натуральных чисел (n,k), что число $(n+1)(n+2)\dots(n+k)-k$ является полным квадратом. *(Ильясов С., Овчинников Д.)*

6. Последовательность $\{a_n\}$ определяется следующим образом: $a_1 = 2015$, $a_2 = 2^{2015}$ и при всех натуральных $n \geq 1$

$$a_{n+2} = a_n + \left\lceil \frac{a_{n+1}}{n} \right\rceil.$$

Докажите, что существуют натуральные числа M и c такие, что при всех $n \geq M$ число $na_{a_n} + c$ будет точной степенью. (Здесь $\lceil x \rceil$ — верхняя целая часть числа x, то есть наименьшее целое число, которое не меньше x. Число называется точной степенью, если оно представимо в виде m^k для некоторых целых $m > 1$ и $k > 1$.) *(Сатылханов К.)*