Республиканская олимпиада по математике, 2015 год, 10 класс

1. Окружность ω, описанная около треугольника ABC, пересекает стороны AD и DC, параллелограмма $ABCD$, во второй раз в точках A_1 и C_1 соответственно. Обозначим через E точку пересечения прямых AC и A_1C_1. Пусть BF — диаметр ω, а точка O_1 симметрична центру ω относительно AC. Докажите, что прямые FO_1 и DE перпендикулярны. *(М. Кунгожин)*

2. Дано натуральное число a. Докажите, что для любого натурального m существует бесконечно много натуральных n таких, что количество делителей числа na^n+1 делится на m. *(Сатылханов К.)*

3. На плоскости заданы 2015 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой и никакие четыре на одной окружности. Рассмотрим окружности, проходящие через три точки из данного множества и разбивающие остальные пополам, то есть 1006 лежит внутри окружности, а 1006 вне нее. Докажите, что найдутся хотя бы три окружности из рассмотренных, пересекающиеся по двум точкам из данного множества. *(Ильясов С.)*

4. Дана функция $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ такая, что для любых целых x и y выполнено $f\left(x-f\left(y\right)\right)-f\left(2x-f\left(y\right)\right)=f(x)^2$. Докажите, что для всех целых x справедливо равенство $f\left(f\left(x\right)\right)=0$. Здесь $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел. *(Ильясов С.)*

5. Даны две окружности ω_1 и ω_2, отрезки AB и CD — общие внешние касательные к ним (точки A и C лежат на ω_1, а точки B и D — на ω_2). Прямая AD во второй раз пересекает окружность ω_1 в точке P, а окружность ω_2 в точке — Q. Пусть касательная к ω_1 в точке P пересекает AB в точке R, а касательная к ω_2 в точке Q пересекает CD в точке S. M — середина отрезка RS. Докажите, что $MP=MQ$. *(М. Кунгожин)*

6. Даны натуральные числа k, ℓ и $a_1,a_2,\ldots,a_k$ $(\ell\geq 2)$. Докажите, что для любого натурального M существует натуральное число x, такое, что каждое из чисел x, $x+1$, ..., $x+M-1$ не представимо в виде $a_i^n+m^\ell$, где n и m — целые неотрицательные числа $(1\leq i\leq k)$. *(Сатылханов К.)*