Республиканская олимпиада по математике, 2014 год, 9 класс

1. В треугольнике ABC точка I — центр вписанной окружности, а ω — описанная окружность. Прямые BI и CI пересекают ω соответственно в точках B_1 и C_1, а прямая B_1C_1 пересекает прямые AB и AC в точках C_2 и B_2, соответственно. Пусть ω_1 — описанная окружность треугольника IB_1C_1, а прямые IB_2 и IC_2 пересекают ω_1 в точках M и N, соответственно. Докажите, что $BC_2 \cdot B_2C = B_2M \cdot C_2N$. *(Шалгымбай Б.)*

2. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_{2014}$ — перестановка чисел 1, 2, ..., 2014. Какое наибольшее количество чисел среди чисел $a_1^2 + a_2$, $a_2^2 + a_3$, ..., $a_{2013}^2 + a_{2014}$, $a_{2014}^2 + a_1$ могут быть точными квадратами? *(Сатылханов К.)*

3. Докажите, что если p, q, m, n натуральные числа, причем p и q простые, то равенство $\left(2^p - p^2\right)\left(2^q - q^2\right) = p^m q^n$ невозможно. *(Сатылханов К.)*

4. Дано целое $n \geq 1$ и положительные действительные числа a_1, a_2, ..., a_n. Пусть $s = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Известно, что для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ выполняется неравенство ${a_i}^2 > i a_i + s$. Докажите, что $2s > 3n^2$. *(Сатылханов К.)*

5. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ справедливы следующие соотношения: $AB = BC$, $AD = BD$ и $\angle ADB = 2\angle BDC$. Известно, что $\angle ACD = 100^\circ$. Найдите $\angle ADC$. *(М. Кунгожин)*

6. Из доски $2^n \times 2^n$ $(n \geq 3)$ вырезали одну клетку. Докажите, что оставшуюся часть доски можно покрыть без наложений уголками из 3-х клеток по крайней мере $4^{3 \cdot 4^{n-3}}$ различными способами. *(Д. Елиусизов)*