Республиканская олимпиада по математике, 2014 год, 11 класс

1. Пусть a_1, a_2, ..., a_{2014} — перестановка чисел 1, 2, ..., 2014. Какое наибольшее количество чисел среди чисел $a_1^2+a_2$, $a_2^2+a_3$, ..., $a_{2013}^2+a_{2014}$, $a_{2014}^2+a_1$ могут быть точными квадратами? *(Сатылханов К.)*

2. Существуют ли натуральные числа a и b такие, что для каждого натурального n числа a^n+n^b и b^n+n^a взаимно просты? *(Сатылханов К.)*

3. Треугольник ABC вписан в окружность Γ. Вписанная в треугольник окружность касается стороны BC в точке N. ω — окружность, вписанная в сегмент BAC окружности Γ, и проходящая через точку N. Пусть точки O и J — центры окружностей ω и вневписанной окружности (касающейся стороны BC), соответственно. Докажите, что прямые AO и JN параллельны. *(Ильясов С.)*

4. В неравнобедренном треугольнике ABC вписанная окружность касается сторон AB и BC в точках C_1 и A_1 соответственно, а вневписанная окружность (касающаяся стороны AC) — соответственно в точках C_2 и A_2. Точка N — основание биссектрисы из вершины B. Прямая A_1C_1 пересекают прямую AC в точке K_1. Пусть описанная окружности треугольника BK_1N повторно пересекают описанную окружность треугольника ABC в точке P_1. Аналогично определим точки K_2 и P_2. Докажите, что $AP_1=CP_2$. *(М. Кунгожин)*

5. Обозначим через $\mathbb{Q}$ множество всех рациональных чисел. Найдите все функции $f:\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$, удовлетворяющие для любых рациональных чисел x,y,z равенству $f(x,y)+f(y,z)+f(z,x)=f(0,x+y+z)$. *(А. Васильев)*

6. Докажите, что для любого натурального n на отрезке $[n-4\sqrt{n},\ n+4\sqrt{n}]$ найдется число, представимое в виде x^3+y^3, где x и y — неотрицательные целые числа. *(А. Васильев)*