Республиканская олимпиада по математике, 2014 год, 10 класс

1. Действительные числа a, b, c, d удовлетворяют следующим условиям: i) $a \neq b,\ b \neq c,\ c \neq d,\ d \neq a$; ii) $\dfrac{1}{(a-b)^2} + \dfrac{1}{(b-c)^2} + \dfrac{1}{(c-d)^2} + \dfrac{1}{(d-a)^2} = 1$. Найдите минимум выражения $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$. *(Сатылханов К.)*

2. Дан треугольник ABC, около которого описана окружность ω. Точки D и D_1, лежащие на прямой AC, симметричны друг другу относительно середины AC. Пусть BD и BD_1 во второй раз пересекают ω в точках E и E_1, соответственно. Докажите, что все такие прямые EE_1 проходят через фиксированную точку плоскости.

3. Существуют ли натуральные числа a и b такие, что для каждого натурального n числа $a^n + n^b$ и $b^n + n^a$ взаимно просты? *(Сатылханов К.)*

4. Из доски $2^n \times 2^n$ $(n \geq 3)$ вырезали одну клетку. Докажите, что оставшуюся часть доски можно покрыть без наложений уголками из 3-х клеток по крайней мере $3^{4^{n-3}}$ различными способами. *(Д. Елиусизов)*

5. Около неравнобедренного треугольника ABC описана окружность ω, точка M — середина AC. Касательная к ω в точке B пересекает прямую AC в точке N, а прямая BM повторно пересекает ω в точке L. Пусть точка P симметрична точке L относительно M. Окружность, описанная около треугольника BPN, повторно пересекает прямую AN в точке Q. Докажите, что $\angle ABP = \angle QBC$. *(М. Кунгожин)*

6. Докажите, что для любого натурального n на отрезке $[n - 4\sqrt{n},\ n + 4\sqrt{n}]$ найдется число, представимое в виде $x^3 + y^3$, где x и y — неотрицательные целые числа. *(А. Васильев)*