Республиканская олимпиада по математике, 2013 год, 9 класс

1. На доске записаны числа 1, 2, ..., 25. За ход нужно стереть 3 некоторых числа a, b, c написанных на доске и записать вместо него число $a^3 + b^3 + c^3$. Докажите, что последнее оставшееся число не может быть равно 2013^3. *(Сатылханов К.)*

2. Докажите, что для любого натурального числа n существуют натуральные числа a, b, c такие, что

$$n = (a^2 - bc)(b, c) + (b^2 - ca)(c, a) + (c^2 - ab)(a, b).$$

Здесь (a, b) — наибольший общий делитель чисел a, b. *(Сатылханов К.)*

3. Дан треугольник ABC, около которого описана окружность с центром O. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC, а точки A_1 ($A \neq A_1$) и B_1 $(B \neq B_1)$ на описанной окружности такие, что угол $\angle IA_1B = \angle IA_1C$ и $\angle IB_1A = \angle IB_1C$. Докажите, что прямые AA_1 и BB_1 пересекаются на прямой OI. *(М. Кунгожин)*

4. а) Верно ли, что любое рациональное число можно представить в виде суммы нескольких рациональных чисел, произведение которых равно 1? б) Верно ли, что любое рациональное число можно представить в виде произведения нескольких рациональных чисел, сумма которых равна 1? *(А. Васильев)*

5. Пусть AD, BE и CF биссектрисы треугольника ABC. Обозначим через M и N середины отрезков DE и DF соответственно. Докажите, что если $\angle BAC \geq 60^\circ$, то $BN + CM < BC$. *(Сатылханов К.)*

6. Дано множество $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ и натуральное число m. Сколько существует способов разделить А на m частей так, что если числа $a < b$ лежат в одной части, а $c < d$ в другой, то $(a - d)(b - c) > 0$? Например, если $n = 4$, $m = 2$, то существует 5 способов разделения:

$$\{1, 2\}\{3, 4\}; \quad \{1, 2, 3\}\{4\}; \quad \{1, 2, 4\}\{3\}; \quad \{1, 3, 4\}\{2\}; \quad \{2, 3, 4\}\{1\}.$$

(Д. Елиусизов)