Республиканская олимпиада по математике, 2013 год, 11 класс

1. Определите все тройки натуральных чисел (m, n, k) такие, что $(m^n - 1)$ делится на k^m и $(n^m - 1)$ делится k^n. *(Сатылханов К.)*

2. Дан треугольник ABC, около которого описана окружность с центром O. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC, а точки A_1 ($A \neq A_1$) и B_1 $(B \neq B_1)$ на описанной окружности такие, что угол $\angle IA_1B = \angle IA_1C$ и $\angle IB_1A = \angle IB_1C$. Докажите, что прямые AA_1 и BB_1 пересекаются на прямой OI. *(М. Кунгожин)*

3. Последовательность $\{a_n\}_{n=1,2,...}$ определена следующим образом:

$$a_1 = 1, \;\; a_n = \frac{a_{[n/2]}}{2} + \frac{a_{[n/3]}}{3} + ... + \frac{a_{[n/n]}}{n}.$$

Докажите, что для всех натуральных чисел n выполнено $a_{2n} < 2a_n$. Здесь $[x]$ — целая часть числа x, наибольшее целое число, не превосходящее x. *(Сатылханов К.)*

4. Пусть a, b, c принадлежат отрезку $[-2, 2]$. Найдите наибольшее возможное значение суммы $|a^2 - bc + 1| + |b^2 - ca + 1| + |c^2 - ab + 1|$. *(Сатылханов К.)*

5. Дан треугольник ABC. Пусть вписанная в него окружность касается сторон AB, BC и AC в точках C_1, A_1 и B_1 соответственно. Известно, что выполняется равенство $1/AC_1 + 1/BC_1 = 2/CA_1$. Докажите, что отрезок CC_1 делится вписанной окружностью в отношении $1 : 2$ считая от вершины C. *(М. Кунгожин)*

6. Две черепахи одновременно выходят из точки с координатами $(0, 0)$ и на каждом шагу одновременно переходят на одну из целочисленных координат вверх или вправо (то есть из (x, y) в $(x + 1, y)$ или в $(x, y + 1)$). Сколько существует способов им добраться до точки (n, n), если последний раз они встречались только в точке $(0, 0)$? *(Д. Елиусизов)*