Республиканская олимпиада по математике, 2013 год, 10 класс

1. На доске записаны числа $1, 2, \ldots, 25$. За ход нужно стереть 3 некоторых числа a, b, c написанных на доске и записать вместо него число $a^3 + b^3 + c^3$. Докажите, что последнее оставшееся число не может быть равно 2013^3. *(Сатылханов К.)*

2. Пусть a, b, c натуральные такие, что для любого натурального n, число $((a^n - 1)(b^n - 1)(c^n - 1) + 1)^3$ делится на $(abc)^n$. Докажите, что $a = b = c$. *(Сатылханов К.)*

3. Пусть диагонали вписанного выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке P, а продолжение противоположных сторон AB и CD в точке K. Точки M и N на сторонах AB и CD соответственно такие, что выполняется равенство $AM/MB = CN/ND$. Пусть MN пересекает диагонали $ABCD$ в точках Q и R. Докажите, что описанные окружности треугольников PRQ и KMN касаются, причем в фиксированной точке плоскости. *(М. Кунгожин)*

4. Пусть a, b, c принадлежат отрезку $[-2, 2]$. Найдите наибольшее возможное значение суммы $|a^2 - bc + 1| + |b^2 - ca + 1| + |c^2 - ab + 1|$. *(Сатылханов К.)*

5. Дан треугольник ABC. Пусть вписанная в него окружность касается сторон AB, BC и AC в точках C_1, A_1 и B_1 соответственно. Известно, что выполняется равенство $1/AC_1 + 1/BC_1 = 2/CA_1$. Докажите, что отрезок CC_1 делится вписанной окружностью в отношении $1 : 2$ считая от вершины C. *(М. Кунгожин)*

6. Две черепахи одновременно выходят из точки с координатами $(0, 0)$ и на каждом шагу одновременно переходят на одну из целочисленных координат вверх или вправо (то есть из (x, y) в $(x + 1, y)$ или в $(x, y + 1)$). Сколько существует способов им добраться до точки (n, n), если последний раз они встречались только в точке $(0, 0)$? *(Д. Елиусизов)*