Республиканская олимпиада по математике, 2012 год, 11 класс

1. Число $1\underbrace{33\ldots3}_{k-\text{раз}}$ — простое, $k > 1$. Докажите, что $k^2 - 2k + 3$ кратно 6. *(А. Васильев)*

2. Назовем таблицу 6×6, состоящую из нулей и единиц, правильной, если сумма чисел в каждой строке и каждом столбце равна 3. Две правильные таблицы называются подобными, если одну можно получить из другой с помощью последовательных перестановок строк и столбцов. Найдите наибольшее количество попарно не подобных друг другу правильных таблиц.

3. Прямая PQ касается вписанной в треугольник ABC окружность таким образом, что точки P и Q лежат на сторонах AB и AC, соответственно. На сторонах AB и AC выбраны точки M и N, соответственно, так, что $AM = BP$ и $AN = CQ$. Докажите, что все построенные таким образом прямые MN проходят через одну точку. *(А. Васильев)*

4. Функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ удовлетворяет соотношению $f(xf(y)) = yf(x)$ для любых вещественных x, y. Докажите, что эта функция нечетна (т.е. $f(-z) = -f(z)$ для любого вещественного z).

5. Даны лучи OP и OQ. Внутри меньшего угла POQ выбраны точки M и N , такие что $\angle POM = \angle QON$ и $\angle POM < \angle PON$. Окружность, которая касается лучей OP и ON, пересекает вторую окружность, которая касается лучей OM и OQ, в точках B и C. Доказать что $\angle POC = \angle QOB$.

6. Рассмотрим уравнение $ax^2 + by^2 = 1$, где a, b — фиксированные положительные рациональные числа. а) Приведите пример такого уравнения, не имеющего решения в рациональных числах x, y. б) Приведите пример такого уравнения, имеющего бесконечно много решений в рациональных числах x, y. в) Докажите, что любое такое уравнения либо не имеет решений в рациональных числах, либо имеет бесконечно много таких решений.