Республиканская олимпиада по математике, 2012 год, 10 класс

1. Для положительных вещественных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ докажите неравенство:

$$\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+\ldots+\frac{1}{1+x_n} \leq \frac{n}{1+\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}}}.$$

2. Пусть $ABCD$ вписанный четырехугольник, в котором $\angle BAD < 90^\circ$. На лучах AB и AD выбраны точки K и L, соответственно, такие, что $KA = KD$, $LA = LB$. Пусть N — середина отрезка AC. Докажите, что если $\angle BNC = \angle DNC$, то $\angle KNL = \angle BCD$.

3. Имеется n шаров, пронумерованных числами от 1 до n, и $2n-1$ урн, пронумерованных числами от 1 до $2n-1$. Для каждого i шар с номером i можно поместить только в урны с номерами от 1 до $2i-1$. Пусть k — целое число от 1 до n. Сколькими способами можно выбрать k шаров, k урн и разложить эти шары по выбранным урнам, чтобы в каждой урне было ровно по одному шару?

4. Пусть ω_1, ω_2, ω_3 — вневписанные окружности треугольника $A_1A_2A_3$ площади S. ω_1 касается стороны A_2A_3 в точке B_1 (и продолжении сторон A_1A_2 и A_1A_3). Прямая A_1B_1 пересекает ω_1 в точках B_1 и C_1. Пусть S_1 — площадь четырехугольника $A_1A_2C_1A_3$. Аналогично определим S_2 и S_3. Докажите, что

$$\frac{1}{S} \leq \frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\frac{1}{S_3}.$$

(А. Васильев)

5. Функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ удовлетворяет соотношению $f(xf(y)) = yf(x)$ для любых вещественных x, y. Докажите, что эта функция нечетна (т.е. $f(-z) = -f(z)$ для любого вещественного z).

6. Последовательность a_n определяется следующим образом: $a_1 = 4$, $a_2 = 17$ и для любого $k \geq 1$ справедливы соотношения:

$$a_{2k+1} = a_2 + a_4 + \ldots + a_{2k} + (k+1)(2^{2k+3}-1),$$

$$a_{2k+2} = (2^{2k+2}+1)a_1 + (2^{2k+3}+1)a_3 + ... + (2^{3k+1}+1)a_{2k-1} + k.$$

Найдите наименьшее m, такое что $(a_1 + a_2 + ... + a_m)^{2012^{2012}} - 1$ делится на $2^{2012^{2012}}$. *(Сатылханов К.)*