Республиканская олимпиада по математике, 2011 год, 9 класс

1. Вписанная в четырехугольник $ABCD$ окружность касается сторон AB, BC, CD, DA в точках K, L, M, N соответственно. Пусть P, Q, R, S середины сторон KL, LM, MN, NK. Докажите что $PR = QS$ тогда и только тогда, когда $ABCD$ вписанный.

2. Определите наименьшее возможное число $n > 1$ такое, что существует натуральные числа $a_1, a_2, \dots, a_n$, для которых $(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 - 1$ делится на $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2$. *(А. Васильев)*

3. На некоторых клетках прямоугольной таблицы $m \times n$ $(m, n > 1)$ стоит по одной шашке. Малыш разрезал по линиям сетки эту таблицу так, что она распалась на две одинаковые части, при этом количество шашек на каждой части оказались одинаковыми. Карлсон поменял расстановку шашек на доске (причем на каждой части клетке по прежнему стоит не более одной шашки). Докажите, что Малыш может снова разрезать доску на две одинаковые части, содержащие равное количество шашек.

4. Выпишем в порядке возрастания число 1 и все натуральные числа, сумма цифр которых делится на 5. Получим последовательность 1, 5, 14, 19, ... Докажите, что n-ый член последовательности меньше чем $5n$.

5. Дан неравнобедренный треугольник ABC. A_1, B_1, C_1 — точки касания вписанной окружности со сторонами BC, AC, AB. Q и L — точки пересечения отрезка AA_1 со вписанной окружностью и отрезком B_1C_1 соответственно. M — середина отрезка B_1C_1. T — точка пересечения прямых BC и B_1C_1. P — основание перпендикуляра из точки L на прямую AT. Докажите, что точки A_1, M, Q, P лежат на одной окружности. *(А. Баев)*

6. Дано натуральное число n. Один из корней квадратного уравнения $x^2 - ax + 2n = 0$ равен $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$. Докажите, что $2\sqrt{2n} \le a \le 3\sqrt{n}$. *(А. Васильев)*