Республиканская олимпиада по математике, 2011 год, 11 класс

1. Дано действительное число $a > 0$. Сколько положительных действительных решений имеет уравнение $a^x = x^a$?

2. Пусть ω — описанная окружность треугольника ABC с тупым углом C а C' симметричная точка точке C относительно AB. M — середина AB. $C'M$ пересекает ω в точке N (C' между M и N). Пусть BC' вторично пересекает ω в точке F, а AC' вторично пересекает w в точке E. K — середина EF. Докажите что прямые AB, CN и KC' пересекаются в одной точке. *(М. Кунгожин)*

3. Даны нечетные натуральные числа $m > 1$, k и простое число p такое, что $p > mk + 1$. Докажите, что сумма

$$(C_k^k)^m + (C_{k+1}^k)^m + ... + (C_{p-1}^k)^m \quad \text{делится на} \quad p^2.$$

Здесь $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ — биномиальный коэффициент. *(Д. Елиусизов)*

4. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, среднее арифметическое и среднее геометрическое делителей которых одновременно являются целыми числами. *(А. Васильев)*

5. На столе лежит карандаш, заточенный с одного конца. Ученик может поворачивать карандаш вокруг одного из его концов на 45° по часовой или против часовой стрелки. Может ли ученик после нескольких поворотов вернуть карандаш на исходное место так, чтобы заточенный и незаточенный конец поменялись местами?

6. Назовем квадратную таблицу бинарной, если в каждой ее клетке записано одно число 0 или 1. Бинарная таблица называется регулярной, если в каждой ее строке и в каждом столбце ровно по 2 единицы. Определите количество регулярных таблиц размером $n \times n$ ($n > 1$ — данное фиксированное натуральное число). (Можно считать, что строки и столбцы таблиц пронумерованы: случаи совпадения при повороте, отражения и т.п. считать различными). *(Д. Елиусизов)*