Республиканская олимпиада по математике, 2011 год, 10 класс

1. Вписанная в треугольник ABC окружность с центром I касается сторон AB и AC в точках C_1 и B_1 соответственно. Точка M делит отрезок C_1B_1 в отношении $3:1$, считая от C_1. N — середина стороны AC. Докажите, что точки I, M, B_1, N лежат на одной окружности, если известно что $AC = 3(BC - AB)$. *(А. Васильев)*

2. Дано натуральное число n. Докажите неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)(i+2)(i+3)(i+4)} < \frac{1}{96}.$$

(Д. Елиусизов)

3. На некоторых клетках прямоугольной таблицы $m \times n$ $(m, n > 1)$ стоит по одной шашке. Малыш разрезал по линиям сетки эту таблицу так, что она распалась на две одинаковые части, при этом количество шашек на каждой части оказались одинаковыми. Карлсон поменял расстановку шашек на доске (причем на каждой части клетке по прежнему стоит не более одной шашки). Докажите, что Малыш может снова разрезать доску на две одинаковые части, содержащие равное количество шашек. *(Н. Седракян)*

4. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, среднее арифметическое и среднее геометрическое делителей которых одновременно являются целыми числами. *(А. Васильев)*

5. Дан неравнобедренный треугольник ABC. A_1, B_1, C_1 — точки касания вписанной окружности со сторонами BC, AC, AB. Q и L — точки пересечения отрезка AA_1 со вписанной окружностью и отрезком B_1C_1 соответственно. M — середина отрезка B_1C_1. T – точка пересечения прямых BC и B_1C_1. P — основание перпендикуляра из точки L на прямую AT. Докажите, что точки A_1, M, Q, P лежат на одной окружности. *(А. Баев)*

6. Определите все пары положительных действительных чисел (α, β) для которых существует функция $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ удовлетворяющая для всех положительных действительных чисел x уравнению $f(f(x)) = \alpha f(x) - \beta x$. *(Д. Елиусизов)*