Республиканская олимпиада по математике, 2010 год, 9 класс

1. Окружность ω проходит через вершину B, касается стороны AC в точке D и пересекает стороны AB и BC треугольника ABC в точках P и Q, соответственно. Прямая PQ пересекает BD в точке M, а AC — в точке N. Докажите, что ω, окружность, описанная около треугольника DMN, и окружность, касающаяся PQ в точке M и проходящая через B, пересекаются в одной точке. *(А. Васильев)*

2. Ровно $4n$ чисел из множества целых чисел $A = \{1, 2, \dots, 6n\}$ покрашены в красный цвет, а остальные — в синий. Докажите, что найдется $3n$ последовательных целых чисел из множества A, из которых ровно $2n$ окрашены в красный цвет (а остальные n чисел окрашены в синий).

3. Дано положительное действительное число A. Найдите наибольшее возможное значение действительного числа M, для которого выполнено неравенство

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{A}{x+y} \geq \frac{M}{\sqrt{xy}}$$

для любых положительных действительных чисел x, y. *(А. Васильев)*

4. Пусть x — наименьшее из решений уравнения $x^2 - 4x + 2 = 0$. Чему равны первые две цифры после запятой в десятичной записи числа $x + x^2 + \dots + x^{20}$?

5. В треугольнике ABC $(AB < BC)$ точка I — центр вписанной окружности, M — середина стороны AC, N — середина дуги ABC описанной окружности. Докажите, что $\angle IMA = \angle INB$.

6. Числа 1, 2, ..., 2010 расположены в ряд в произвольном порядке. Рассмотрим ряд, полученный следующим образом: к каждому числу прибавляется номер его места в ряду. Докажите, что если в полученном ряду нет одинаковых чисел, то в нем найдутся два числа, разность которых равна 2010.