Республиканская олимпиада по математике, 2010 год, 11 класс

1. Известно, что для натурального числа n существует натуральное число a такое, что $a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$, а для любого простого делителя p числа $n-1$ верно, что $a^{(n-1)/p} \equiv 1 \pmod{n}$. Докажите, что n — простое.

2. В результате операции сцепления, примененной к последовательности $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, получается последовательность

$$(x_1x_2, x_2x_3, \dots, x_nx_1).$$

Для каких натуральных $n > 1$ из любой начальной последовательности, состоящей только из чисел 1 и -1, всегда можно получить последовательность $(1, 1, \dots, 1)$ применением конечного числа операций сцепления?

3. Внутри выпуклого четырехугольника $ABCD$ существуют точки M и N такие, что $\angle NAD = \angle MAB$, $\angle NBC = \angle MBA$, $\angle MCB = \angle NCD$, $\angle NDA = \angle MDC$. Докажите, что $S(ABM) + S(ABN) + S(CDM) + S(CDN) = S(BCM) + S(BCN) + S(ADM) + S(ADN)$, где $S(XYZ)$ — площадь треугольника XYZ.

4. Для неотрицательных чисел x, y докажите неравенство $\sqrt{x^2-x+1}\sqrt{y^2-y+1} + \sqrt{x^2+x+1}\sqrt{y^2+y+1} \geq 2(x+y)$. *(М. Кунгожин)*

5. Пусть O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC. Обозначим через D основание высоты, опущенной из A на BC, через E — точку пересечения AD и CO. Пусть M — середина AE, а точка F — основание перпендикуляра, опущенного из C на AO. Докажите, что точка пересечения прямых OM и BC лежит на описанной окружности треугольника BOF. *(А. Васильев)*

6. Назовем числами года неотрицательные целые числа, десятичная запись которых состоит только из цифр $0, 1, 2$. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде $A^2 + B$, где A — целое, а B — число года. *(А. Васильев)*