Республиканская олимпиада по математике, 2010 год, 10 класс

1. Дан треугольник ABC. Рассмотрим эллипс Ω_1, проходящий через точку C , у которого фокусы расположены в точках A и B. Аналогичным образом определим эллипсы Ω_2, Ω_3 (с фокусами B, C и C, A соответственно). Докажите, что если все три эллипса проходят через одну общую точку D, то точки A, B, C, D лежат на одной окружности (эллипсом называется геометрическое место точек, суммарное расстояние от которых до 2-х фиксированных точек, называемых фокусами, есть постоянная величина). *(Д. Елиусизов)*

2. Последовательность $\{a_n\}$, $n \geq 1$ определена следующим образом: $a_1 = \alpha$ и $a_{n+1} = 2a_n^2 - 1$ для $n \geq 1$. Сколько различных значений может принимать действительное число α, если $a_{2010} = 0$? *(Д. Елиусизов)*

3. В результате операции сцепления, примененной к последовательности $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, получается последовательность

$$(x_1x_2, x_2x_3, \dots, x_nx_1).$$

Для каких натуральных $n > 1$ из любой начальной последовательности, состоящей только из чисел 1 и -1, всегда можно получить последовательность $(1, 1, \dots, 1)$ применением конечного числа операций сцепления?

4. Докажите, что для любых действительных чисел a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n выполнено неравенство

$$\left(a_1^{2010} + a_2^{2010} + \dots + a_n^{2010}\right)\left(b_1^{2010} + b_2^{2010} + \dots + b_n^{2010}\right) \geq$$
$$\left(a_1b_1^{2009} + a_2b_2^{2009} + \dots + a_nb_n^{2009}\right)\left(a_1^{2009}b_1 + a_2^{2009}b_2 + \dots + a_n^{2009}b_n\right).$$

(Д. Елиусизов)

5. На сторонах выпуклого четырехугольника $ABCD$ во внешнюю сторону построены правильные треугольники ABK, BCL, CDM, DAN. Обозначим через P и Q середины отрезков BL и AN, соответственно. Пусть X — центр описанной окружности треугольника CMD. Докажите, что $PQ \perp KX$.

6. Назовем числами года неотрицательные целые числа, десятичная запись которых состоит только из цифр 0, 1, 2. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде $A^2 + B$, где A — целое, а B — число года. *(А. Васильев)*