# Республиканская олимпиада по математике, 2009 год, 9 класс

**1.** В треугольнике $ABC$ вписанная окружность касается сторон $BC$, $CA$ и $AB$ в точках $A_1$, $B_1$ и $C_1$ соответственно. Обозначим ортоцентры треугольников $AC_1B_1$ и $CA_1B_1$ через $H_1$ и $H_2$. Докажите, что четырехугольник $AH_1H_2C$ — вписанный.

**2.** В шахматном турнире участвуют 11 человек. За весь турнир каждый игрок играет с каждым другим ровно одну партию. В каждой партии игроку за выигрыш начисляется — 1 очко, за ничью — $0,!5$ очков, а за проигрыш — 0 очков. Если по окончании турнира игрок набирает не менее 75 от максимального возможного количества очков, которые он может набрать, то ему присваивается разряд. Какое наибольшее количество участников турнира могут получить разряд?

**3.** Обозначим через $S_n$ — количество упорядоченных наборов из $n$ натуральных чисел $(a_1, a_2, ..., a_n)$ для которых

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n} = 1.$$

Определите четность числа $S_7$.

**4.** Для положительных чисел $a$, $b$ и $c$ выполнено равенство $abc = 1$. Докажите, что

$$\frac{1}{a(b+c)} + \frac{1}{b(c+a)} + \frac{1}{c(a+b)} \leq \frac{a+b+c}{2}.$$

**5.** Дан остроугольный треугольник $ABC$, в котором $AC < AB$. Его высоты $BB_1$ и $CC_1$ пересекаются в точке $H$, а прямые $B_1C_1$ и $BC$ пересекаются в точке $P$. Пусть $M$ — середина $BC$, прямые $MH$ и $AP$ пересекается в точке $K$. Докажите, что $KM$ — биссектриса $\angle B_1KB$.

**6.** Можно ли клетчатый квадрат размером $10 \times 10$ разрезать по линиям сетки на: а) 4 фигурки вида I и 21 фигурку вида II? б) 4 фигурки вида I, 19 фигурок вида II и 2 фигурки вида III? (Фигурки можно произвольно поворачивать и переворачивать)