Республиканская олимпиада по математике, 2009 год, 11 класс

1. Пусть $f(k) = \underbrace{2^{2^{\cdots^{2}}}}_{k \text{ раз}}$, где k натуральное. Докажите, что для любого натурального $n \geq 2$, число $f(n) - f(n-1)$ делится на n.

2. В треугольнике АBC проведены высоты AA_1, BB_1, CC_1. Обозначим центры вписанных окружностей треугольников AC_1B_1 и CA_1B_1 через I_1 и I_2 соответственно. Пусть вписанная окружность треугольника ABC касается стороны AC в точке B_2. Докажите, что четырехугольник $I_1I_2B_1B_2$ — вписанный.

3. В шахматном турнире участвуют n человек ($n > 1$ — натуральное число). За весь турнир каждый игрок играет с каждым другим ровно одну партию. В каждой партии игроку за выигрыш начисляется 1 очко, за ничью — $0,!5$ очков, а за проигрыш — 0 очков. Если по окончании турнира игрок набирает не менее 75 от максимального возможного количества очков, которые он может набрать, то ему присваивается разряд. Какое наибольшее количество участников турнира могут получить разряд?

4. Докажите, что для чисел $0 < a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ $(n \geq 3)$ выполнено неравенство

$$\frac{a_1^2}{a_2} + \frac{a_2^3}{a_3^2} + ... + \frac{a_n^{n+1}}{a_1^n} \geq a_1 + a_2 + ... + a_n.$$

(Д. Елиусизов)

5. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O. Пусть прямые AD и BC пересекаются в точке M, прямые AB и CD — в точке N, прямые AC и BD — в точке P, а прямые OP и MN — в точке K. Докажите, что $\angle PKC = \angle AKP$.

6. Докажите, что не существует четырех точек на плоскости таких, что расстояние между любыми двумя из них является нечетным целым числом.