Республиканская олимпиада по математике, 2009 год, 10 класс

1. Обозначим через S_n — количество упорядоченных наборов из n натуральных чисел $(a_1, a_2, ..., a_n)$ для которых

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n} = 1.$$

Определите четность числа S_{10}.

2. В треугольнике ABC вписанная окружность касается сторон BC, CA и AB в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Обозначим ортоцентр треугольника $A_1C_1B_1$ через H_1. Пусть I — центр вписанной, а O — центр описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что точки I, O и H_1 лежат на одной прямой.

3. В шахматном турнире участвуют n человек ($n > 1$ — натуральное число). За весь турнир каждый игрок играет с каждым другим ровно одну партию. В каждой партии игроку за выигрыш начисляется 1 очко, за ничью — 0,!5 очков, а за проигрыш — 0 очков. Если по окончании турнира игрок набирает не менее 75 от максимального возможного количества очков, которые он может набрать, то ему присваивается разряд. Какое наибольшее количество участников турнира могут получить разряд?

4. Докажите, что для любых положительных чисел a, b, c и d выполнено неравенство

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+cd} + \frac{b^2+c^2+d^2}{bc+cd+da} + \frac{c^2+d^2+a^2}{cd+da+ab} + \frac{d^2+a^2+b^2}{ad+ab+bc} \geq 4.$$

5. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O. Пусть прямые AD и BC пересекаются в точке M, прямые AB и CD — в точке N, прямые AC и BD — в точке P, а прямые OP и MN — в точке K. Докажите, что $\angle PKC = \angle AKP$.

6. Пусть $f(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами. Известно, что для некоторого натурального числа k выполнено равенство $\underbrace{f(f(... f(0) ...))}_{k-\text{раз}} = 0$.

Докажите, что $f(0) = 0$ или $f(f(0)) = 0$.