Республиканская олимпиада по математике, 2008 год, 9 класс

1. Для положительных действительных чисел a, b, c докажите неравенство $\dfrac{a^2-bc}{2a^2+bc}+\dfrac{b^2-ac}{2b^2+ac}+\dfrac{c^2-ab}{2c^2+ab}\leq 0.$

2. Вневписанная окружность с центром I_a касается стороны BC и продолжений сторон AC и AB треугольника ABC. Обозначим через B_1 середину дуги AC описанной окружности треугольника ABC, содержащей вершину B. Докажите, что точки I_a и A равноудалены от точки B_1.

3. На олимпиаде по математике, которая проводится в течение двух дней, участвовало 15 девятиклассников. В каждый из дней каждый участник получил целое неотрицательное число баллов, не превосходящее 20. Никакие два участника ни в первый, ни во второй день не получили одинаковое число баллов. Во второй день задачи были сложнее, чем в первый день, и поэтому каждый участник во второй день получил меньше баллов, чем в первый день. Какое наибольшее число девятиклассников могло в сумме за два дня получить одинаковое число баллов?

4. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Пусть продолжение сторон AB и CD за точки B и C, соответственно, пересекаются в точке M. Обозначим основания перпендикуляров из точки M на диагонали AC и BD соответственно через P и Q. Докажите, что $KP=KQ$ где, K — середина стороны AD.

5. Дано натуральное число $n\geq 2$. Найдите все действительные решения $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ уравнения

$$(1-x_1)^2+(x_1-x_2)^2+\dots+(x_{n-1}-x_n)^2+x_n^2=\frac{1}{n+1}.$$

6. Какое максимальное число прямых на плоскости можно выбрать так, чтобы нашлось 8 точек таких, что на каждой из выбранных прямых было не менее трёх из этих точек?