Республиканская олимпиада по математике, 2008 год, 11 класс

1. Для натурального числа k обозначим через F_k — множество всех связанных плоских фигур, состоящих ровно из k единичных клеток. Для произвольной плоской фигуры f через $S(f)$ обозначим наименьшую возможную площадь прямоугольника, содержащего внутри себя f. Для заданного n натурального определите $\max\limits_{f \in F_n} S(f)$. *(Д. Елиусизов)*

2. Вневписанная окружность с центром I_b касается стороны AC и продолжении сторон BC и BA треугольника ABC. Обозначим через B_1 середину дуги AC описанной окружности треугольника ABC, содержащую вершину B, а через B_2 — основание внешней биссектрисы угла B. Докажите, что прямая B_2I перпендикулярна прямой B_1I_b, где I — центр вписанной окружности ABC.

3. Дан многочлен $f(x,y,z)$ с целочисленными коэффициентами (от трех переменных x,y,z) такой, что

$$f(x,y,z) = -f(z,y,x) = -f(z,y,x) = -f(y,x,z).$$

Докажите, что $f(a,b,c)$ — четное число для любых целых чисел a,b,c.

4. Найдите все последовательности целых чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2008}$, удовлетворяющих уравнению

$$(2008 - a_1)^2 + (a_1 - a_2)^2 + \ldots + (a_{2007} - a_{2008})^2 + a_{2008}^2 = 2008.$$

5. На стороне AB треугольника ABC выбрана точка K. Продолжение стороны AC (за точку C) и касательная из точки K к вписанной окружности треугольника ABC пересекаются в точке N. Проведена окружность ω, касающаяся сторон AC, AB и описанной окружности треугольника AKN. Доказать, что описанная окружность треугольника ABC касается ω. *(М. Кунгожин)*

6. Какое максимальное число плоскостей в пространстве можно выбрать так, чтобы нашлось 6 точек, удовлетворяющих следующим условиям: а) на каждой из выбранных плоскостей находится не менее 4 из этих точек; б) никакие 4 их этих точек не лежат на одной прямой?