Республиканская олимпиада по математике, 2008 год, 10 класс

1. Найдите все пары $(a;b)$ целых чисел a и b, удовлетворяющих равенству $a^4-3a^2+4a-3=7\cdot 3^b$.

2. Биссектриса угла A треугольника ABC пересекает сторону BC в точке A_1 , а описанную окружность в точке A_0. Аналогично определяются точки C_1 и C_0. Прямые A_0C_0 и A_1C_1 пересекаются в точке P. Докажите, что PI параллельна стороне AC, где I — центр вписанной окружности.

3. Докажите неравенство $a^{12}+(ab)^6+(abc)^4+(abcd)^3\le 1,!43(a^{12}+b^{12}+c^{12}+d^{12})$ для неотрицательных чисел a, b, c, d. *(Н. Седракян)*

4. Даны две окружности, касающиеся внутренним образом в точке N. Хорды BA и BC внешней окружности касаются внутренней в точках K и M соответственно. Пусть Q и P — соответственно середины дуг AB и BC , не содержащих точку N. Окружности, описанные около треугольников BQK и BPM, пересекаются в точке $B_1\ne B$. Докажите, что BPB_1Q — параллелограмм.

5. Найдите все последовательности целых чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2008}$, удовлетворяющих уравнению $(2008-a_1)^2+(a_1-a_2)^2+\ldots+(a_{2007}-a_{2008})^2+a_{2008}^2=2008$.

6. Какое максимальное число прямых на плоскости можно выбрать так, чтобы нашлось 8 точек таких, что на каждой из выбранных прямых было не менее трёх из этих точек?