Республиканская олимпиада по математике, 2007 год, 9 класс

1. Имеется 300 яблок, любые два из которых различаются по весу не более, чем в три раза. Докажите, что их можно разложить в пакеты по четыре яблока так, чтобы любые два пакета различались по весу не более, чем в полтора раза.

2. Дан треугольник ABC. Точка R выбрана на продолжении стороны AB за точку B так, что $BR = BC$, а точка S выбрана на продолжении стороны AC за точку C так, что $CS = CB$. Диагонали четырехугольника $BRSC$ пересекаются в точке A'. Аналогично определяются точки B' и C'. Докажите, что площадь шестиугольника $AC'BA'CB'$ равна сумме площадей треугольников ABC и $A'B'C'$.

3. Найдите все простые p, для которых существует такое натуральное m, что справедливо равенство $(p-1)!+1 = p^m$.

4. Найдите наибольшее возможное $\alpha > 0$, такое, что для любых a, b, c с условием $0 < a, b, c \leq 1$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{a+b+c} \geq \frac{1}{3} + \alpha\,(1-a)\,(1-b)\,(1-c)\,.$$

5. Пусть I — центр вписанной в треугольник ABC окружности, BP — биссектриса угла $\angle ABC$, P лежит на AC. Докажите, что если $AP + AB = CB$, то треугольник API — равнобедренный.

6. Докажите, что любая бесконечная арифметическая прогрессия $a, a+d, a+2d, ...$, где a и d — натуральные, содержит в качестве подпоследовательности бесконечную геометрическую прогрессию b, bq, bq^2, ..., где b и q — натуральные.

7. Докажите, что для любого натурального n выполняется неравенство $\{n\sqrt{7}\} > \frac{3\sqrt{7}}{14n}$, где $\{x\}$ означает дробную часть числа x.

8. Каждая клетка доски 100×100 покрашена в один из 100 цветов так, что имеется ровно 100 клеток каждого цвета. Докажите, что существует строка или столбец, в котором встречаются клетки не менее 10 различных цветов.