Республиканская олимпиада по математике, 2007 год, 11 класс

1. Нули многочлена четвертой степени $f(x)$ образуют арифметическую прогрессию. Докажите, что нули многочлена $f'(x)$ также образуют арифметическую прогрессию.

2. Пусть ABC — равнобедренный треугольник с $AC = BC$, I — центр вписанной в него окружности. Точка P принадлежит окружности, описанной около треугольника AIB, P лежит внутри ABC. Прямые, проходящие через P параллельно CA и CB, пересекают AB в точках D и E , соответственно. Прямая, проходящая через P параллельно AB, пересекает CA и CB в точках F и G, соответственно. Докажите, что прямые DF и EG пересекаются на окружности, описанной около треугольника ABC.

3. Найдите все решения в простых числах уравнения $p(p+1) + q(q+1) = r(r+1)$.

4. На прямоугольном столе разложено несколько одинаковых квадратных листов бумаги так, что их стороны параллельны краям стола (листы могут перекрываться). Докажите, что можно воткнуть несколько булавок таким образом, что каждый лист будет прикреплен к столу ровно одной булавкой.

5. Выпуклый четырехугольник $ABCD$ с $AB \neq DC$ вписан в окружность. Пусть $AKDL$ и $CMBN$ — ромбы с одинаковой стороной a. Докажите, что точки K, L, M, N лежат на одной окружности.

6. Каждая клетка доски 100×100 покрашена в один из 100 цветов так, что имеется ровно 100 клеток каждого цвета. Докажите, что существует строка или столбец, в котором встречаются клетки не менее 10 различных цветов.

7. Пусть p — простое число, такое, что p^2 делит $2^{p-1} - 1$. Докажите, что для любого натурального n число $(p-1)(p! + 2^n)$ имеет не менее трех различных простых делителей.

8. Найдите все функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, удовлетворяющие условию $f(xf(y)+f(x))=2f(x)+xy$ для любых действительных x и y.