Республиканская олимпиада по математике, 2007 год, 10 класс

1. Пусть a, b, c — положительные числа. Докажите неравенство

$$\frac{1}{a+ab+abc}+\frac{1}{b+bc+bca}+\frac{1}{c+ca+cab}\leq\frac{1}{3\sqrt[3]{abc}}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

2. Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность с центром O. Точка P выбрана на меньшей из двух дуг AB. Прямая, проходящая через P перпендикулярно BO, пересекает стороны AB и BC в точках S и T соответственно. Прямая, проходящая через P перпендикулярно AO, пересекает стороны AB и AC в точках Q и R, соответственно. Докажите, что: а) треугольник PQS — равнобедренный; б) $PQ^2 = QR \cdot ST$.

3. Дана бесконечная последовательность попарно различных действительных чисел. Докажите, что в ней можно выбрать возрастающую или убывающую подпоследовательность, состоящую из 2007 чисел.

4. Назовем натуральное число n хорошим, если существуют такие целые $a_1, a_2, \ldots, a_n$, что $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = n$. Найдите все хорошие числа.

5. В треугольнике ABC точка M — середина стороны AB, BD — биссектриса угла $\angle ABC$, D лежит на AC. Известно, что $\angle BDM = 90^\circ$. Найдите отношение $AB : BC$.

6. Пусть m и n — натуральные числа, для которых уравнение $(x+m)(x+n) = x+m+n$ имеет не менее одного целого решения. Докажите, что $\frac{1}{2} < \frac{m}{n} < 2$.

7. Найдите все пары (α, β) рациональных чисел, удовлетворяющие уравнению $\alpha^2 + \beta^2 = \alpha^3 + \beta^3$.

8. Каждая клетка доски 100×100 покрашена в один из 100 цветов так, что имеется ровно 100 клеток каждого цвета. Докажите, что существует строка или столбец, в котором встречаются клетки не менее 10 различных цветов.