Республиканская олимпиада по математике, 2006 год, 9 класс

1. Найдите какое-нибудь девятизначное число N, состоящее из различных цифр, такое, что среди всех чисел, получающихся из N вычеркиванием семи цифр, было бы не более одного простого. Докажите, что найденное число подходит. (Если полученное вычеркиванием цифр число начинается на ноль, то ноль тоже вычеркивается.)

2. В каждую клетку бесконечной клетчатой плоскости записано одно из чисел 1, 2, 3, 4 так, что каждое число встречается хотя бы один раз. Назовем клетку *правильной*, если количество различных чисел, записанных в четыре соседние (по стороне) с ней клетки, равно числу, записанному в эту клетку. Могут ли все клетки плоскости оказаться правильными?

3. Известно, что $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_6^2 = 6$ и $x_1 + x_2 + \dots + x_6 = 0$. Докажите, что $x_1 x_2 \dots x_6 \le \frac{1}{2}$.

4. Биссектрисы углов A и C треугольника ABC пересекают описанную окружность этого треугольника в точках A_0 и C_0 соответственно. Прямая, проходящая через центр вписанной окружности треугольника ABC параллельно стороне AC, пересекается с прямой A_0C_0 в точке P. Докажите, что прямая PB касается описанной окружности треугольника ABC.

5. На доске записано произведение $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{100}$, где a_1, ..., a_{100} — натуральные числа. Рассмотрим 99 выражений, каждое из которых получается заменой одного из знаков умножения на знак сложения. Известно, что значения ровно 32 из этих выражений четные. Какое наибольшее количество четных чисел среди a_1, a_2, ..., a_{100} могло быть?

6. В остроугольном треугольнике ABC проведена биссектриса AD и высота BE. Докажите, что угол CED больше 45°.

7. При изготовлении партии из $N \ge 5$ монет работник по ошибке изготовил две монеты из другого материала (все монеты выглядят одинаково). Начальник знает, что таких монет ровно две, что они весят одинаково, но отличаются по весу от остальных. Работник знает, какие это монеты и что они легче остальных. Ему нужно, проведя два взвешивания на чашечных весах без гирь, убедить начальника в том, что фальшивые монеты легче настоящих, и в том, какие именно монеты фальшивые. Может ли он это сделать?

8. Число N, не делящееся на 81, представимо в виде суммы квадратов трех целых чисел, делящихся на 3. Докажите, что оно также представимо в виде суммы квадратов трех целых чисел, не делящихся на 3.