Республиканская олимпиада по математике, 2006 год, 10 класс

1. Натуральные числа от 1 до 200 разбили на 50 множеств. Докажите, что в одном из них найдутся три числа, являющиеся длинами сторон некоторого треугольника.

2. Назовем раскраску доски 8×8 в три цвета *хорошей*, если в любом уголке из пяти клеток присутствуют клетки всех трех цветов. (Уголок из пяти клеток — это фигура, получающаяся из квадрата 3×3 вырезанием квадрата 2×2.) Докажите, что количество хороших раскрасок не меньше, чем 68.

3. Биссектрисы углов A и C треугольника ABC пересекают описанную окружность этого треугольника в точках A_0 и C_0 соответственно. Прямая, проходящая через центр вписанной окружности треугольника ABC параллельно стороне AC, пересекается с прямой A_0C_0 в точке P. Докажите, что прямая PB касается описанной окружности треугольника ABC.

4. Даны $n > 1$ приведенных квадратных трехчленов $x^2 - a_1x + b_1$, ..., $x^2 - a_nx + b_n$, причем все $2n$ чисел a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n различны. Может ли случиться, что каждое из чисел a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n является корнем одного из этих трехчленов?

5. Докажите, что для каждого x такого, что $\sin x \neq 0$, найдется такое натуральное n, что $|\sin nx| \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

6. Через точку пересечения высот остроугольного треугольника ABC проходят три окружности, каждая из которых касается одной из сторон треугольника в основании высоты. Докажите, что вторые точки пересечения окружностей являются вершинами треугольника, подобного исходному.

7. При каких натуральных n найдутся такие положительные рациональные, но не целые числа a и b, что оба числа $a + b$ и $a^n + b^n$ — целые?

8. У выпуклого многогранника $2n$ граней ($n \geq 3$), и все грани являются треугольниками. Какое наибольшее число вершин, в которых сходится ровно 3 ребра, может быть у такого многогранника?