Республиканская олимпиада по математике, 2005 год, 9 класс

1. При каких нижеперечисленных значениях A, B, C система уравнений

$$\begin{cases} (x-y)(z-t)=A, \\ (y-z)(t-x)=B, \\ (x-z)(y-t)=C, \end{cases}$$

имеет решение в вещественных числах, и при каких нет? а) $A=1$, $B=2$, $C=3$; б) $A=3$, $B=2$, $C=1$.

2. Найти минимальное целое число k, обладающее следующим свойством: в любом множестве из k различных десятичных цифр существуют два элемента, что составленное ими двузначное число делится на квадрат целого числа, большего 1.

3. Пусть M — точка пересечения отрезков AL и CK, где точки K и L лежат соответственно на сторонах AB и BC треугольника ABC так, что четырехугольники $AKLC$ и $KBLM$ — вписанные. Найдите угол $\angle ABC$, если радиусы окружностей, описанных около указанных четырехугольников, равны.

4. Найдите все натуральные числа n такие, что 8^n-1 делит 80^n-1 без остатка.

5. На стороне CD трапеции $ABCD$ $(BC \parallel AD)$ отмечена точка K так, что треугольник ABK — равносторонний. Докажите, что на прямой AB существует такая точка L, что треугольник CDL также равносторонний.

6. Найдите все тройки натуральных чисел, удовлетворяющих свойству: произведение любых двух чисел при делении на третье число дает остаток 1.

7. Найдите целую часть числа $\dfrac{2^1}{1!}+\dfrac{2^2}{2!}+\dfrac{2^3}{3!}+\ldots+\dfrac{2^{100}}{100!}$.

8. На окружности радиуса 1 отмечены n точек. Докажите, что существует не более $\frac{n^2}{3}$ различных отрезков, длины которых больше $\sqrt{2}$, с концами в этих точках.