Республиканская олимпиада по математике, 2005 год, 11 класс

1. При каких нижеперечисленных значениях A, B, C система уравнений

$$\begin{cases} (x-y)(z-t)(z-x)(z-t)^2 = A, \\ (y-z)(t-x)(t-y)(x-z)^2 = B, \\ (x-z)(y-t)(z-t)(y-z)^2 = C, \end{cases}$$

имеет решение в вещественных числах, и при каких нет? а) $A = 2$, $B = 8$, $C = 6$; б) $A = 2$, $B = 6$, $C = 8$.

2. Докажите неравенство $ab + bc + ac \geq 2(a + b + c)$ для положительных действительных чисел a, b, c если известно, что $a + b + c + 2 = abc$. *(Д. Елиусизов)*

3. Множество точек на плоскости считается *хорошей*, если любые три точки имеют ось симметрии, т.е. либо лежат на одной прямой, либо являются вершинами равнобедренного или равностороннего треугольника. Опишите а) все 6-элементные хорошие множества; б) все 7-элементные хорошие множества.

4. Функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, где $\mathbb{R}$ — поле вещественных чисел, удовлетворяет тождеству $f(f(x) + x + y) = 2x + f(y)$ для любых $x, y \in \mathbb{R}$. *(Д. Елиусизов, Е. Байсалов)*

5. Решить уравнение $2^{\frac{1}{2}-2|x|} = \left|\mathrm{tg}x + \frac{1}{2}\right| + \left|\mathrm{tg}x - \frac{1}{2}\right|$.

6. Прямая, параллельная стороне AC прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90^\circ$), пересекает стороны AB и BC в точках M и N соответственно, так, что $CN/BN = AC/BC = 2$. Пусть O — точка пересечения отрезков AN и CM, а точка K лежит на отрезке ON так, что $MO + OK = KN$. Перпендикуляр к отрезку AN в точке K и биссектриса угла B треугольника ABC пересекаются в точке T. Найдите угол $\angle MTB$.

7. В каждую единичную клетку таблицы 2005×2005 вписано одно число из множества $\{-1, 0, 1\}$ так, что сумма всех вписанных чисел равна 0. Докажите, что найдутся две строки и два столбца этой таблицы такие, что сумма четырех чисел, написанных на пересечении этих строк и столбцов, равна 0.

8. Найдите все многочлены $P(x)$ с действительными коэффициентами, удовлетворяющие следующему условию: для каждого натурального числа n существует рациональное число r такое, что $P(r) = n$.