Республиканская олимпиада по математике, 2005 год, 10 класс

1. При каких нижеперечисленных значениях A, B, C система уравнений

$$\begin{cases} (x-y)(z-t)(z-x)(z-t)^2 = A, \\ (y-z)(t-x)(t-y)(x-z)^2 = B, \\ (x-z)(y-t)(z-t)(y-z)^2 = C, \end{cases}$$

имеет решение в вещественных числах, и при каких нет? а) $A=2$, $B=8$, $C=6$; б) $A=2$, $B=6$, $C=8$.

2. Докажите неравенство $ab+bc+ac \geq 2(a+b+c)$ для положительных действительных чисел a, b, c если известно, что $a+b+c+2=abc$. *(Д. Елиусизов)*

3. Найдите все функции $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$, где R — поле вещественных чисел, удовлетворяющие тождеству $f(xy+f(x)) = xf(y)+f(x)$ для любых $x, y \in \mathrm{R}$. *(Д. Елиусизов)*

4. Известно, что p, $p+2$, $p+2^n$, $p+2+2^n$ — простые числа. Найдите возможные целые значения n.

5. В остроугольном треугольнике ABC угол $\angle A = 45^\circ$, а высоты BB_1, и CC_1 пересекаются в точке H. Докажите, что прямые BC, B_1C_1 и прямая l, проходящая через точку A перпендикулярно AC, пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда H — середина отрезка BB_1.

6. Найдите все тройки натуральных чисел, удовлетворяющих свойству: произведение любых двух чисел при делении на третье число дает остаток 1.

7. Обозначим через S_i, множество i-элементных подмножеств множества $M = \{1, 2, \ldots, n\}$ для каждого $0 \leq i \leq n$. Пусть $k < n/2$. Докажите, что существует функция $f : S_k \to S_{k+1}$ удовлетворяющая следующим условиям: а) если $X \neq Y \in S_k$, то $f(X) \neq f(Y)$; б) $X \subset f(X)$ для любого $X \in S_k$.

8. На окружности радиуса 1 отмечены n точек. Докажите, что существует не более $\dfrac{n^2}{3}$ различных отрезков, длины которых больше $\sqrt{2}$, с концами в этих точках.