Республиканская олимпиада по математике, 2004 год, 9 класс

1. Арена цирка, имеющая форму круга, полностью освещается n различными прожекторами. Каждый прожектор освещает некоторую выпуклую фигуру. Известно, что если выключить один произвольный прожектор, то арена будет по-прежнему полностью освещена, а если выключить произвольные два прожектора, то арена полностью освещена не будет. При каких значениях n это возможно?

2. Пусть $a_1 = 1$; $a_2 = 2$ и $a_{n+1} = \frac{a_n a_{n-1}+1}{a_{n-1}}$ для $n = 2, 3, \ \dots$. Докажите, что $a_n > \sqrt{2n}$ для $n \geq 3$.

3. В остроугольном треугольнике ABC точка D является основанием высоты из вершины C, а M — середина стороны AB. Прямая, проходящая через M, пересекает лучи CA и CB соответственно в точках K и L так, что $CK = CL$. Пусть S — центр описанной окружности треугольника CKL. Докажите, что $SD = SM$.

4. Пусть даны взаимно простые, целые, положительные числа a и b. Если целое число представимо в виде $ax + by$ с положительными целыми x, y, то назовем его *допустимым*, а в противном случае это число назовем *запретным*. Докажите, что множества допустимых и запретных чисел расположены симметрично относительно некоторой точки действительной прямой.

5. Две одинаковые шахматные доски (8×8 клеток), наложенные друг на друга, имеют общий центр, причем одна из них повернута относительно другой на 45° около центра. Найдите суммарную площадь всех пересечений черных клеток этих двух досок, если площадь одной клетки равна 1.

6. Около остроугольного треугольника ABC, где $\angle ABC = 2\angle ACB$, описана окружность с центром O. Пусть K — точка пересечения AO и BC, а точка O_1 — центр описанной окружности треугольника ACK. Докажите, что площадь четырехугольника $AKCO_1$ равна площади треугольника ABC. *(А. Васильев)*

7. На плоскости даны 2004 треугольника, длины сторон которых натуральные числа, не превосходящие n. При каком максимальном значении n можно утверждать, что среди них обязательно найдутся а) два равных треугольника; б) два подобных треугольника?

8. Последовательность $\{a_n\}$ целых чисел удовлетворяет соотношению $a_{n+2} = a_{n+1}^2 + a_n$ для всех натуральных n. Докажите, что существует $m > 1$ такое, что $a_2^3 + a_3^3 + ... + a_m^3$ делится на 2004. *(А. Васильев)*