Республиканская олимпиада по математике, 2004 год, 11 класс

1. Для вещественных чисел $1 \le a \le b \le c \le d \le e \le f$ докажите неравенство

$$(af + be + cd)(af + bd + ce) \le (a + b^2 + c^3)(d + e^2 + f^3).$$

(А. Васильев)

2. *Зигзагом* назовем ломаную на плоскости, образованную из двух параллельных лучей и отрезка, соединяющего начала этих лучей. На какое максимальное число частей может быть разбита плоскость с помощью n зигзагов?

3. Существует ли последовательность $\{a_n\}$ натуральных чисел, удовлетворяющая следующим условиям: а) в этой последовательности встречается каждое натуральное число и ровно один раз; б) $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ делится на n^n для каждого $n = 1, 2, 3, ...$?

4. В некотором ауле 1000 жителей. Ежедневно каждый из них делится узнанными вчера новостями со всеми своими знакомыми. Известно, что любая новость становится известной всем жителям аула. Докажите, что можно выбрать 90 жителей так, что если одновременно всем им сообщить какую-то новость, то через 10 дней она станет известной всем жителям аула.

5. Пусть $P(x)$ многочлен с действительными коэффициентами такой, что $P(x) > 0$ для всех $x \ge 0$. Докажите, что существует положительное целое число n такое, что $(1 + x)^n P(x)$ многочлен с неотрицательными коэффициентами.

6. Последовательность целых чисел a_1, a_2, ... определяется следующим образом: $a_1 = 1$ и $n > 1$, a_{n+1} наименьшее целое число больше a_n и такое, что $a_i + a_j \ne 3a_k$ для любых i, j и k из $\{1, 2, ..., n+1\}$ не обязательно разные. Определить a_{2004}.

7. Докажите, что для любых $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ верно неравенство

$$8a^2b^2c^2 \ge (a^2 + ab + ac - bc)(b^2 + ba + bc - ac)(c^2 + ca + cb - ab).$$

8. Пусть $ABCD$ выпуклый четырехугольник с AB не параллельным CD, и пусть X точка внутри $ABCD$ такая, что $\angle ADX = \angle BCX < 90^\circ$ и $\angle DAX = \angle CBX <$

90°. Если Y точка пересечения серединных перпендикуляров AB и CD, то докажите, что $\angle AYB = 2\angle ADX$.