Республиканская олимпиада по математике, 2004 год, 10 класс

1. Пусть $a_1 = 1$; $a_2 = 2$ и $a_{n+1} = \frac{a_n a_{n-1}+1}{a_{n-1}}$ для $n = 2, 3, \ldots$. Докажите, что $a_n > \sqrt{2n}$ для $n \geq 3$.

2. Определите все целые числа $m, n \geq 2$ такие, что $1 + m^{3^n} + m^{2\cdot 3^n}$ делится на n.

3. *Зигзагом* назовем ломаную на плоскости, образованную из двух параллельных лучей и отрезка, соединяющего начала этих лучей. На какое максимальное число частей может быть разбита плоскость с помощью n зигзагов?

4. Пусть n — фиксированное натуральное число. Найдите количество всех последовательностей $(a_1, a_2, \ldots, a_{2n})$, где $a_i = \pm 1$ для любого $1 \leq i \leq 2n$, удовлетворяющих условию: для любых $1 \leq k \leq l \leq n$ верно

$$\left| \sum_{i=2k-1}^{2l} a_i \right| \leq 2.$$

5. В треугольнике ABC сторона BC наименьшая. На лучах BA и CA отложены отрезки BD и CE равные BC. Докажите, что радиус описанной окружности треугольника ADE равен $\sqrt{R^2 - 2Rr}$ (где R и r — радиусы описанной и вписанной окружностей треугольника ABC).

6. Пусть p_1, p_2, ..., p_n — различные простые числа, большие 3. Докажите, что число $2^{p_1 p_2 \ldots p_n} + 1$ имеет не менее 4^n делителей.

7. Пусть $P(x)$ многочлен с действительными коэффициентами такой, что $P(x) > 0$ для всех $x \geq 0$. Докажите, что существует положительное целое число n такое, что $(1+x)^n P(x)$ многочлен с неотрицательными коэффициентами.

8. Вещественные числа a, b, c таковы, что числа $\dfrac{1+bc}{b-c}$, $\dfrac{1+ac}{c-a}$ и $\dfrac{1+ab}{b-a}$ целые. Докажите, что тогда они попарно взаимно просты.